

III. 【円運動】

■ 等速円運動 ■

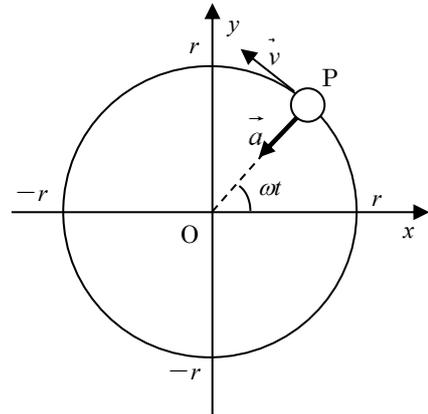
動点 P が半径 r の円周上を動くとき
 時刻 t において動点 P が位置 $(x, y) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$
 とすると、(角速度 ω [rad/s] : 1 秒あたりの回転角)

・ 速度 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$

$\Rightarrow v = r\omega$ [m/s] (接線方向)

・ 加速度 $\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t)$

$\Rightarrow a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$ [m/s²] (中心方向)



・ 周期 T [s] = $\frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$: 1 回転の時間

・ 回転数 n [1/s=Hz] = $\frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\omega}{2\pi}$: 1 秒間の回転数

○ 慣性系の場合

運動方程式で考える。

$F = ma = mr\omega^2 = m \frac{v^2}{r}$: 向心力 (中心方向に向かう力)

○ 非慣性系の場合

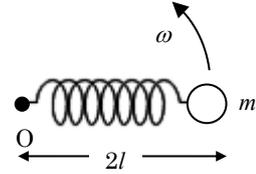
遠心力 (慣性力) $mr\omega^2$ または $m \frac{v^2}{r}$ (中心方向と逆向きの力) を考慮した

力のつりあいの式を考える。

【2】

図のように、質量 m [kg] の小球を、自然の長さが l [m] の軽い巻きばねの一端に付け、他端を点 O に固定し、なめらかな水平面上を角速度 ω [rad/s] で等速円運動させた。このとき、ばねの長さは $2l$ [m] になったとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 小球の加速度の大きさ a [m/s²] を求めよ。
- (2) このとき小球が受けている向心力の大きさ F [N] を求めよ。
- (3) ばねのばね定数 k [N/m] を求めよ。

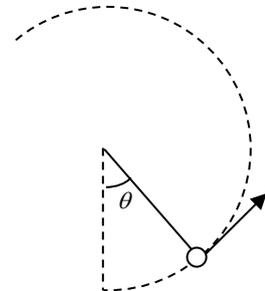


- (4) 等速円運動の角速度を $\frac{\omega}{2}$ [rad/s] にしたときの、ばねの長さ l' [m] と向心力の大きさ F' [N] を求めよ。

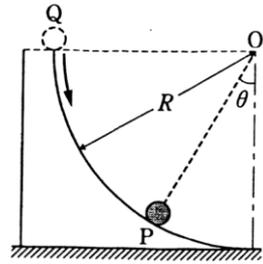
<例題2>

長さ r の糸に質量 m の物体 P を取り付け、最下点で初速 v_0 を与えて回した。

- (1) P が一回転するための v_0 の条件を求めよ。
- (2) $\theta = 120^\circ$ で糸がゆるんだ。 v_0 はいくらか。



【3】図のように、半径 R 、中心角 90° のなめらかな円弧面をもつ台が、水平面に固定されている。台の頂点 Q に質量 m の小物体を静止させてから、円弧に沿って静かにすべらせた。小物体が円弧面上の点 P に来たとき、円弧の中心 O と P を結ぶ直線 OP が鉛直線となす角を θ 、重力加速度の大きさを g として次の問いに答えよ。

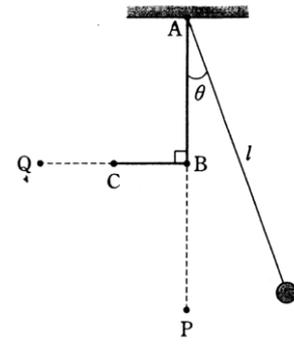


- (1) 点 P における小物体の速さ v はいくらか。
- (2) 点 P において、小物体が円弧面から受ける垂直抗力 N の大きさはいくらか。また、 $\theta = 0^\circ$ のとき、 N の値はいくらか。

【4】図のように長さ $\frac{\ell}{2}$ の薄い板 AB と長さ $\frac{\ell}{4}$ の薄い板 BC を

垂直に接合し、AB が鉛直になるように固定する。上端 A に長さ ℓ の糸の一端を固定し、他端に質量 m の物体を結びつける。糸がたるまないように物体を手で持ち上げ、糸の鉛直方向となす角度が θ となったとき、静かに手を離す。

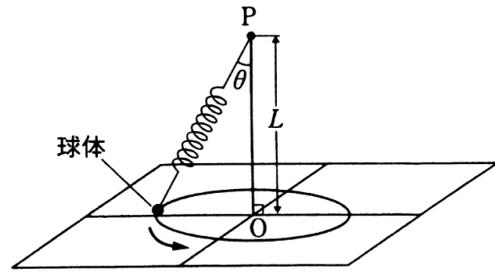
ただし、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であり、重力加速度の大きさを g とする。



- (1) 物体が最下点 P に到達したときの速さ v_p を求めよ。
- (2) 物体が P に到達する直前の糸の張力の大きさ T_p を求めよ。
- (3) 物体が BC と同じ高さの点 Q に到達するための $\cos\theta$ の条件を求めよ。
- (4) 物体が Q に到達したときの速さ v_q を求めよ。
- (5) 物体が Q に到達する直前の糸の張力の大きさ T_q を求めよ。
- (6) 物体が B に到達するための $\cos\theta$ の条件を求めよ。

■発展問題■

【5】水平な机上の点 O に質量 m の小さな球体を置き、その鉛直上方、高さ L の支点 P と自然長 L のばねで結んだ。次に、図のように、この球体をばねの弾性力がフックの法則に従う範囲で、点 O を中心に等速円運動させた。このとき、 OP とばねのなす角を θ とする。ばね定数を k とし、重力加速度の大きさを g とし、以下の問いに答えよ。ただし、机上の摩擦、ばねの質量、空気抵抗、球体の大きさは無視できるものとする。



- (1) 球体が机上を離れずに等速円運動しているとき、ばねの弾性力 F を m, k, g, L, θ のうち必要なものを用いて表せ。
- (2) (1) における球体の速さ v と等速円運動の角速度 ω を m, k, g, L, θ のうち必要なものを用いて表せ。
- (3) 球体の等速円運動の角速度がある限界値 ω_m を超えていると、球体は机上を離れる。限界値 ω_m を m, k, g, L のうち必要なものを用いて表せ。
- (4) フックの法則に従うばねの伸びの限度を x_m とする。この限度内に球体が机上を離れるために、ばね定数 k が満たすべき条件を m, g, L, x_m のうち必要なものを用いて表せ。

(2004年 筑波大)