$\boxed{1}$

(1)　$8^{\frac{5}{6}}=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$，$\log_{27}\dfrac{1}{9}=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

(2)　$y=2^x$ のグラフと $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $\boxed{カ}$ である。

$y=2^x$ のグラフと $y=\log_2 x$ のグラフは $\boxed{キ}$ である。

$y=\log_2 x$ のグラフと $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは $\boxed{ク}$ である。

$y=\log_2 x$ のグラフと $y=\log_2\dfrac{1}{x}$ のグラフは $\boxed{ケ}$ である。

$\boxed{カ}$ ～ $\boxed{ケ}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　同一のもの　　①　x 軸に関して対称

②　y 軸に関して対称　　③　直線 $y=x$ に関して対称

(3)　$x>0$ の範囲における関数 $y=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)^2-4\log_4 x+3$ の最小値を求めよう。

$t=\log_2 x$ とおく。このとき，$y=t^2-\boxed{コ}t+\boxed{サ}$ である。

また，x が $x>0$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は $\boxed{シ}$ である。$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

⓪　$t>0$　　①　$t>1$

②　$t>0$ かつ $t\neq 1$　　③　実数全体

したがって，y は $t=\boxed{ス}$ のとき，すなわち $x=\boxed{セ}$ のとき，最小値 $\boxed{ソタ}$ をとる。

$\boxed{2}$

k を正の定数として $\cos^2 x-\sin^2 x+k\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)=0$ ……① を満たすxについて考える。

(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x の個数について考えよう。

① の両辺に $\sin^2 x\cos^2 x$ をかけ，2 倍角の公式を用いて変形すると

$\left(\dfrac{\sin^2 2x}{\boxed{ア}}-k\right)\cos 2x=0$　……②　を得る。

したがって，k の値に関係なく，$x=\dfrac{\pi}{\boxed{イ}}$ のときは常に ① が成り立つ。

また，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0<\sin^2 2x\leqq 1$ であるから，$k>\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ のとき，① を満たす x は $\dfrac{\pi}{\boxed{イ}}$ のみである。

一方，$0<k<\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ のとき，① を満たす x の個数は $\boxed{オ}$ 個であり，$k=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ のときは $\boxed{カ}$ 個である。

(2)　$k=\dfrac{4}{25}$ とし，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x について考えよう。

② により $\sin 2x=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ であるから $\cos 2x=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ である。

したがって $\cos x=\dfrac{\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$ である。

$\boxed{3}$

座標平面上で，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ を C_1 とし，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を C_2 とする。

(1)　実数 a に対して，2 直線 $x=a$，$x=a+1$ と C_1，C_2 で囲まれた図形 D の面積 S は

$$S=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{\boxed{ア}}x^2+\frac{1}{\boxed{イ}}\right)dx=\frac{a^2}{\boxed{ウ}}+\frac{a}{\boxed{エ}}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$$ である。

S は $a=\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}}$ をとる。

(2)　4 点$(a,\ 0)$，$(a+1,\ 0)$，$(a+1,\ 1)$，$(a,\ 1)$を頂点とする正方形を R で表す。
a が $a\geqq 0$ の範囲を動くとき，正方形 R と(1)の図形 D の共通部分の面積を T とおく。
T が最大となる a の値を求めよう。

直線 $y=1$ は，C_1 と$\left(\pm\boxed{ソ},\ 1\right)$で，$C_2$ と$\left(\pm\boxed{タ},\ 1\right)$で交わる。

したがって，正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは，$0\leqq a\leqq\boxed{チ}$ のときである。

$\boxed{ソ}\leqq a\leqq\boxed{チ}$ のとき，正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり，この範囲で a が増加するとき，T は $\boxed{ツ}$。$\boxed{ツ}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ② のうちから一つ選べ。

⓪　増加する　　　①　減少する　　　②　変化しない

したがって，T が最大になる a の値は，$0\leqq a\leqq\boxed{ソ}$ の範囲にある。

$0\leqq a\leqq\boxed{ソ}$ のとき，(1)の図形 D のうち，正方形 R の外側にある部分の面積 U は

$$U=\frac{a^3}{\boxed{テ}}+\frac{a^2}{\boxed{ト}}$$ である。

よって，$0\leqq a\leqq\boxed{ソ}$ において

$$T=-\frac{a^3}{\boxed{ナ}}-\frac{a^2}{\boxed{ニ}}+\frac{a}{\boxed{ヌ}}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}\ \cdots\cdots ①$$ である。

① の右辺の増減を調べることにより，T は $a=\dfrac{\boxed{ネノ}+\sqrt{\boxed{ハ}}}{\boxed{ヒ}}$ で最大値をとることがわかる。

$\boxed{4}$

真分数を分母の小さい順に，分母が同じ場合には分子の小さい順に並べてできる数列

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，…… を $\{a_n\}$ とする。真分数とは，分子と分母がともに自然数で，分子が分母より小さい分数のことであり，上の数列では，約分できる形の分数も含めて並べている。以下の問題に分数形で解答する場合は，解答上の注意にあるように，それ以上約分できない形で答えよ。

(1)　$a_{15}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。また，分母に初めて8が現れる項は，$a_{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(2)　k を2以上の自然数とする。

数列 $\{a_n\}$ において，$\dfrac{1}{k}$ が初めて現れる項を第 M_k 項とし，$\dfrac{k-1}{k}$ が初めて現れる項を第 N_k 項とすると

$$M_k=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}k^2-\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}k+\boxed{\text{ケ}},\quad N_k=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}k^2-\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}k$$

である。

よって，$a_{104}=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(3)　k を2以上の自然数とする。

数列 $\{a_n\}$ の第 M_k 項から第 N_k 項までの和は，$\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}k-\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 N_k 項までの和は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}k^2-\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}k$ である。

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{103}a_n=\frac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である。

5

四面体OABCにおいて，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=60^\circ$ であるとする。また，辺OA上に点Pをとり，辺BC上に点Qをとる。以下，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

(1) $0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ であるような実数 s，t を用いて $\overrightarrow{OP}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ア}}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{イ}}$ であることから

$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left(\boxed{\text{ウ}}s-\boxed{\text{エ}}\right)^2+\left(\boxed{\text{オ}}t-\boxed{\text{カ}}\right)^2+\boxed{\text{キ}}$ となる。

したがって，$|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるのは $s=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のときであり，このとき $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ となる。

(2) 三角形ABCの重心をGとする。$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ のとき，三角形GPQの面積を求めよう。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boxed{\text{ス}}$ から，$\angle APQ=\boxed{\text{セソ}}^\circ$ である。

したがって，三角形APQの面積は $\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。

また $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\overrightarrow{OQ}$ であり，点Gは線分AQを $\boxed{\text{ナ}}:1$ に内分する点である。

以上のことから，三角形GPQの面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

$\boxed{6}$

n を自然数とする。原点 O から出発して数直線上を n 回移動する点 A を考える。点 A は，1 回ごとに，確率 p で正の向きに 3 だけ移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する。ここで，$0<p<1$ である。n 回移動した後の点 A の座標を X とし，n 回の移動のうち正の向きの移動の回数を Y とする。

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

(1)　$p=\dfrac{1}{3}$，$n=2$ のとき，確率変数 X のとり得る値は，小さい順に $-\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ であり，これらの値をとる確率は，それぞれ $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　n 回移動したとき，X と Y の間に $X=\boxed{\text{ク}}n+\boxed{\text{ケ}}Y$ の関係が成り立つ。

確率変数 Y の平均 (期待値) は $\boxed{\text{コ}}$，分散は $\boxed{\text{サ}}$ なので，X の平均は $\boxed{\text{シ}}$，分散は $\boxed{\text{ス}}$ である。$\boxed{\text{コ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⓑ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ np　　① $np(1-p)$　　② $\dfrac{p(1-p)}{n}$

③ $2np$　　④ $2np(1-p)$　　⑤ $p(1-p)$

⑥ $4np$　　⑦ $4np(1-p)$　　⑧ $16np(1-p)$

⑨ $4np-n$　　ⓐ $4np(1-p)-n$　　ⓑ $16np(1-p)-n$

(3)　$p=\dfrac{1}{4}$ のとき，1200 回移動した後の点 A の座標 X が 120 以上になる確率の近似値を求めよう。

(2) により，Y の平均は $\boxed{\text{セソタ}}$，標準偏差は $\boxed{\text{チツ}}$ であり，求める確率は次のようになる。

$$P(X\geqq 120)=P\left(\frac{Y-\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\geqq \boxed{\text{テ}}.\boxed{\text{トナ}}\right)$$

いま，標準正規分布に従う確率変数を Z とすると，$n=1200$ は十分に大きいので，求める確率の近似値は正規分布表から次のように求められる。

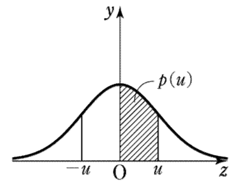
$$P\left(Z\geqq \boxed{\text{テ}}.\boxed{\text{トナ}}\right)=0.\boxed{\text{ニヌネ}}$$

(4)　p の値がわからないとする。2400 回移動した後の点 A の座標が $X=1440$ のとき，p に対する信頼度 95 % の信頼区間を求めよう。

n 回移動したときに Y がとる値を y とし，$r=\dfrac{y}{n}$ とおくと，n が十分に大きいならば，確率変数 $R=\dfrac{Y}{n}$ は近似的に平均 p，分散 $\dfrac{p(1-p)}{n}$ の正規分布に従う。

$n=2400$ は十分に大きいので，このことを利用し，分散を $\dfrac{r(1-r)}{n}$ で置き換えることにより，求める信頼区間は $0.\boxed{\text{ノハヒ}}\leqq p\leqq 0.\boxed{\text{フヘホ}}$ となる。

正規分布表



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900