高2理系数学総合S　課題(12月19日まで)　～極限～

$\boxed{1}$

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}$ を求めよ。

$\boxed{2}$

$a_n=\dfrac{n^n}{n!}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ を用いてよい。

$\boxed{3}$

k は実数の定数で $k\fallingdotseq 0$ とする。$a_1=1$，$ka_n+(2-k)a_{n-1}=1$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ が収束するような k の値の範囲を求めよ。また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$

$a_1=27$，$a_{n+1}=3\sqrt{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　a_3，a_4 を求めよ。

(2)　$b_n=\log_3 a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
　また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{5}$

次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2-n}-(-1)^n}{2^{3n+1}}$$

$\boxed{6}$

次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}$$

$\boxed{7}$

$0\leqq\theta<2\pi$ を満たす実数 θ に対し，$\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を初項1，公比 $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-2$ の等比数列とする。$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の和を求めよ。また，無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束する θ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b\right)=0$ が成り立つように定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{9}$

関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x^2} & (x\fallingdotseq 0)\\ A & (x=0)\end{cases}$ で定義する。関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続になるように定数 A の値を定めよ。

1

$$(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2=\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2=\sum_{k=1}^{n}(n^2+2nk+k^2)$$

$$=n^2\times n+2n\times\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(6n^2+6n^2+6n+2n^2+3n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(14n^2+9n+1)$$

ゆえに $(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{6}n(14n^2+9n+1)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{14n^2+9n+1}{2n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{14+\frac{9}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=7$

別解 $\dfrac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}=\dfrac{\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2}{\sum_{k=1}^{n}k^2}$

$$=\frac{\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(4n+1)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}-1$$

$$=\frac{2(2n+1)(4n+1)}{(n+1)(2n+1)}-1$$

ゆえに，$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}-1\right\}=7$

別解 区分求積法を用いる。

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{\int_0^1(1+x)^2dx}{\int_0^1x^2dx}=\frac{\left[\frac{(1+x)^3}{3}\right]_0^1}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}=7$$

2

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n^n}{n!}\div\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

よって $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$\dfrac{1}{n}=h$ とおくと，$n\longrightarrow\infty$ のとき $h\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(1+h)^{\frac{1}{h}}}=\frac{1}{e}$$

3

$ka_n+(2-k)a_{n-1}=1$ を変形すると $k\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)=(k-2)\left(a_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$

$k\fallingdotseq 0$ であるから $a_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{k-2}{k}\left(a_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{k-2}{k}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{k-2}{k}\right)^{n-1}$$

すなわち $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k-2}{k}\right)^{n-1}$

ここで，$\dfrac{k-2}{k}\fallingdotseq 1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ が収束する条件は $\left|\dfrac{k-2}{k}\right|<1$

すなわち $|k-2|<|k|$ よって $(k-2)^2<k^2$

ゆえに $k>1$

このとき $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{k-2}{k}\right)^{n-1}=0$ であるから $\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$

4

$$a_{n+1}=3\cdot a_n^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots ①$$

(1)　① に $n=1,\ 2,\ 3$ を代入して

$$a_2=3\cdot a_1^{\frac{1}{2}}=3\cdot 3^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{5}{2}},$$

$$a_3=3\cdot a_2^{\frac{1}{2}}=3\cdot 3^{\frac{5}{4}}=3^{\frac{9}{4}},$$

$$a_4=3\cdot a_3^{\frac{1}{2}}=3\cdot 3^{\frac{9}{8}}=3^{\frac{17}{8}}$$

(2)　$a_1=27>0$ と ① から，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ である。

① の両辺について 3 を底とする対数をとると　$\log_3 a_{n+1}=\log_3\left(3\cdot a_n^{\frac{1}{2}}\right)$

ゆえに　$\log_3 a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\log_3 a_n$

すなわち　$b_{n+1}=1+\frac{1}{2}b_n$

これを変形して　$b_{n+1}-2=\frac{1}{2}(b_n-2)$

ここで　$b_1-2=\log_3 27-2=1$

よって，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \text{すなわち} \quad b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\right\}=2$

したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} 3^{b_n}=3^2=9$

5

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2-n}-(-1)^n}{2^{3n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{9}{2}\left(\frac{1}{24}\right)^n-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right\}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{24}\right)^n$ は，初項 $\frac{1}{24}$，公比 $\frac{1}{24}$ の無限等比級数であり，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^n$ は，初項 $-\frac{1}{8}$，公比 $-\frac{1}{8}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\frac{1}{24}\right|<1$，$\left|-\frac{1}{8}\right|<1$ であるから，この 2 つの無限等比級数はともに収束する。

よって
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2-n}-(-1)^n}{2^{3n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{9}{2}\left(\frac{1}{24}\right)^n-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{9}{2}\cdot\frac{\frac{1}{24}}{1-\frac{1}{24}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{8}}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}=\frac{52}{207}$$

6

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2+4k-3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

よって，求める無限級数の和は　$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

7

公比を r とすると　$r=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-2=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-2$

$\theta=\frac{2\pi}{3}$ のとき　$r=2\sin\frac{\pi}{3}-2=\sqrt{3}-2$

したがって　$|r|<1$

ゆえに，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束して，その和は　$\frac{1}{1-r}=\frac{1}{3-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する条件は　$|r|<1$

よって　$-1<2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)-2<1$　　ゆえに　$\dfrac{1}{2}<\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{3}{2}$

したがって　$\dfrac{\pi}{6}<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{6}$

ゆえに　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{7\pi}{6}$

$\boxed{8}$

$a\geqq 0$ であるとすると，$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b)=\infty$ となり不適。

よって　$a<0$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{3x^2+2x+1}-(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3-a^2)x+2(1-ab)+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\left(a+\dfrac{b}{x}\right)}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\sqrt{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\left(a+\dfrac{b}{x}\right)\right\}=\sqrt{3}-a\ (>0)$ であるから，

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+2x+1}+ax+b)=0$ のとき　$3-a^2=0$，$2(1-ab)=0$

これを解いて　$a=-\sqrt{3}$，$b=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{9}$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{1+\cos x}\right)\right\}=1^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

また　$f(0)=A$

関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるとき，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ が成り立つ。

よって　$A=-\dfrac{1}{2}$