$\boxed{1}$

解説

(1)　$F(x)=2x^3+3x^2$ のとき

$$f(x)=F'(x)={}^{ア}6x^2+{}^{イ}6x=6x(x+1)$$

$F'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ -1$

$F(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$F(x)$ は $x={}^{ウエ}-1$ で極大値をとる。

また，$G'(x)=f(x)$ であるから

$$G(x)=\int f(x)dx=\int(6x^2+6x)dx$$
$$={}^{オ}2x^3+{}^{カ}3x^2+C\quad(C\text{は積分定数})\quad\cdots\cdots①$$

と表される。

$G'(x)=F'(x)=6x(x+1)$ であるから，$G(x)$ の増減表は，$F(x)$ と同じく右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$G(x)$ は $x={}^{キ}0$ で極小値をとる。

さらに，条件より，$G(x)$ は $x=k$ で極大値 0 をとるから，$k=-1$ であり　　$G(-1)=0$

これと ① から　　$2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2+C=0$

ゆえに　　$C={}^{クケ}-1$

(2)　(i)　$F(x)$ が $x=0$ で極小値をとることと，$F'(x)=f(x)$ から，

$$F'(0)=f(0)={}^{コ}0$$

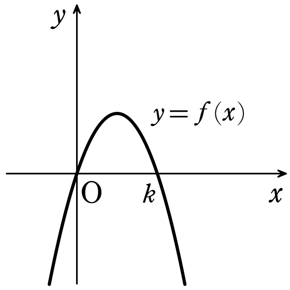
であり，$x=0$ の前後で $F'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号は負から正に変わる。　(^{サ} ⓪)

$G(x)$ が $x=k$ で極大値をとることと，$G'(x)=f(x)$ から，

$$G'(k)=f(k)={}^{シ}0$$

であり，$x=k$ の前後で $G'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号は正から負に変わる。　(^{ス} ①)

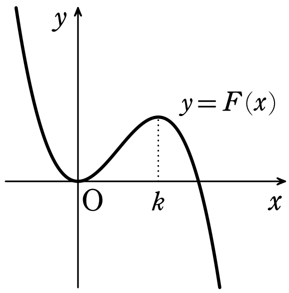
さらに，$f(x)$ は 2 次関数であり，$k>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



$F'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号の変化に注意して，$F(x)$ の増減表をかくと，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

条件より，$F(0)=0$ であるから，$y=F(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。　（セ ③）

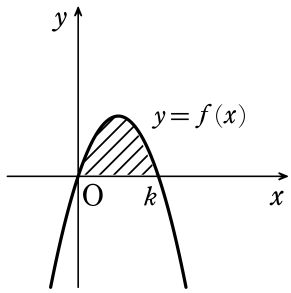


(ii)　$F(0)=0$，$F'(x)=f(x)$ であるから，すべての実数 x に対して

$$F(x)=F(x)-F(0)=\int_0^x F'(t)dt=\int_0^x f(t)dt$$　（ソ ③，タ ⓪）

これと (i) の考察により，$F(x)$ の極大値は　$F(k)=\int_0^k f(t)dt$　（チ ②，ツ ⓪）

ここで，定積分 $\int_0^k f(t)dt$ は，右の図の斜線部分の面積と等しい。



よって，$F(x)$ の極大値は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積と等しいことがわかる。

（テ ⓪，ト ⓪）

また，$G'(x)=F'(x)$ であるから，$G(x)$ の増減表は，$F(x)$ と同じく次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$G'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$G(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

さらに，条件より，$G(k)=0$ であるから，すべての実数 x に対して

$$G(x)=G(x)-G(k)=\int_k^x G'(t)dt=\int_k^x f(t)dt$$

よって，$F(x)$ の極大値は　$F(k)=\int_0^k f(t)dt=-\int_k^0 f(t)dt=-G(0)$

$G(0)$ は $G(x)$ の極小値であるから，$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の極小値の -1 倍と等しい。　（ナ ②）

別解　$F'(x)=G'(x)=f(x)$ であるから，$F(x)$ と $G(x)$ はともに $f(x)$ の原始関数で，

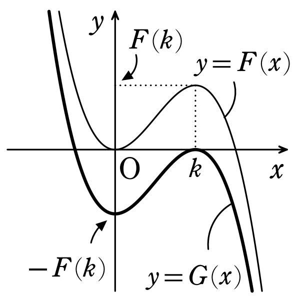
$$G(x)=F(x)+C \quad (C \text{は積分定数})$$

と表される。

このとき，$G(k)=F(k)+C$ であり，$G(k)=0$ であるから　$C=-F(k)$

よって　$G(x)=F(x)-F(k)$

ゆえに，$y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを y 軸方向に $-F(k)$ だけ平行移動したものであり，右の図の太線部分のようになる。



したがって，$G(x)$ の極小値は $-F(k)$ であるから，

$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の極小値の -1 倍と等しい。　（ナ ②）

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=5^2-2\times1+(\sqrt{13})^2=36$

$|\overrightarrow{AB}|\geqq0$ であるから　$|\overrightarrow{AB}|=6$

よって，線分 AB の長さは　6

(2)　直線 OH は平面 ABC に垂直であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

よって　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ここで　$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$=5^2-2\times1+(\sqrt{13})^2=36$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2$

$=1-(\sqrt{13})^2=-12$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-|\overrightarrow{OA}|^2$

$=1-(\sqrt{13})^2=-12$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=(\sqrt{13})^2-1-1+(-11)=0$

よって　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-12+s\times36+t\times0=-12+36s$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2$

$=-12+s\times0+t\times36=-12+36t$

ゆえに　$-12+36s=0$，$-12+36t=0$

したがって　$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{3}$

(3)　(2) より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ であるから　$\angle BAC=90^\circ$

また，$|\overrightarrow{AC}|^2=36$ であり，$|\overrightarrow{AC}|\geqq0$ であるから　$|\overrightarrow{AC}|=6$

よって，$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\times6\times6=18$$

さらに，(2) より $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ であるから

$$|\overrightarrow{AH}|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$=\frac{1}{9}\times36+\frac{2}{9}\times0+\frac{1}{9}\times36=8$$

$\triangle OAH$ は $\angle OHA=90^\circ$ の直角三角形であるから

$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-8}=\sqrt{5}$$

したがって，四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}S|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{1}{3}\times18\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

別解　(2) から，OH の長さは次のように求めてもよい。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\\&\qquad+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(\sqrt{13})^2+\frac{1}{9}\times36+\frac{1}{9}\times36+\frac{2}{3}\times(-12)+\frac{2}{3}\times(-12)+\frac{2}{9}\times0\\&=5\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\geqq0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{5}$

3

解説

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ であるから

$$\begin{aligned}x^{2023}-1&=x^3(x^{2020}-1)+x^3-1\\&=x^3(x^5-1)(x^{2015}+x^{2010}+\cdots\cdots+x^5+1)+x^3-1\\&=x^3(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\times(x^{2015}+x^{2010}+\cdots\cdots+x^5+1)+x^3-1\end{aligned}$$

よって，求める余りは　　x^3-1

4

解説

(1)　Y が 5 で割り切れるための条件は，X_1，X_2，……，X_n のうち少なくとも 1 個は 5 であることである。

よって，求める確率は　　$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(2)　Y が 15 で割り切れないための条件は，

Y が 3 で割り切れない　または　Y が 5 で割り切れない

である。

Y が 3 で割り切れない確率は　　$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Y が 5 で割り切れない確率は　　$\left(\frac{5}{6}\right)^n$

Y が 3 でも 5 でも割り切れない確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

よって，求める確率は　　$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\boxed{5}$

(解説)

(1) $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ とおく。

このとき，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ であるから，与えられた条件より

$$\begin{cases} |\overrightarrow{OC}|=1 & \cdots\cdots ① \\ |\overrightarrow{OD}|=1 & \cdots\cdots ② \\ \overrightarrow{OC}\cdot\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③ から　$|\overrightarrow{OC}|^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=1$

これと ① から　$1^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=1$

よって　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$

したがって　$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})=0$

(2) 与えられた条件から

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OP}-\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\right|\leqq\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ④ \\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\leqq\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

(1) より $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$ であり，$\overrightarrow{OC}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{OD}\neq\vec{0}$ であるから　$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}$

このことと，①，② から，O を原点とする座標平面において

$\overrightarrow{OC}=(1,\ 0)$, $\overrightarrow{OD}=(0,\ 1)$

とおくことができる。

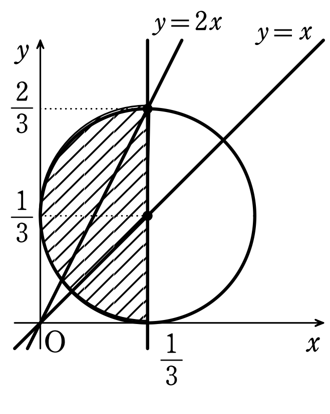
$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{OP}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\left(x-\frac{1}{3},\ y-\frac{1}{3}\right),\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=x$$

よって，④，⑤ から

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2\leqq\dfrac{1}{9} \\ x\leqq\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

したがって，点 P の動く範囲は図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



よって，$|\overrightarrow{OP}|$ が最大となるのは $P\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ のときで，このとき

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるのは，P が半円 $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$，$x\leqq\dfrac{1}{3}$ と直線 $y=x$ の交点となるときで，このとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値は $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，最小値は $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$