数学Ⅰ・A　第2回（100点満点）

（解答・配点）

問題番号（配点）	解答記号（配点）	正解	自己採点欄
第1問 (30)	ア (2)	①	
	イ (2)	⓪	
	ウ (2)	⓪	
	エ (1)	④	
	オ (1)	①	
	カ (2)	③	
	キ (2)	⑤	
	$ク\sqrt{ケ}$ (2)	$6\sqrt{3}$	
	コ (2)	7	
	サ (2)	④	
	$\frac{シス}{セ}$ (2)	$\frac{49}{4}$	
	ソ (2)	⑤	
	タ，チ (2)	①，②	
	ツ (2)	③	
	テ，ト (2)	⓪，⓪	
	ナ (2)	⑦	
小計			

問題番号（配点）	解答記号（配点）	正解	自己採点欄
第2問 (30)	ア，イ (4)（各2）	①，②（解答の順序は問わない）	
	ウ (2)	①	
	エ (3)	④	
	オ (3)	③	
	カ (3)	①	
	キ，クケ (1)	9，63	
	コサ，シス (2)	−4，22	
	$セ\sqrt{3}-ソタ$ (3)	$8\sqrt{3}-14$	
	チ (1)	⓪	
	ツ (1)	⓪	
	$テト+ナニ\sqrt{ヌ}$ (2)	$81+54\sqrt{7}$	
	$ネノ-ハ\sqrt{7}$ (3)	$-1-6\sqrt{7}$	
	ヒ (2)	①	
小計			

問題番号（配点）	解答記号（配点）	正解	自己採点欄
第3問 (20)	ア，イ (2)	②，③（解答の順序は問わない）	
	ウ，エ (2)	⑥，⑦（解答の順序は問わない）	
	$\frac{オ}{カ}$ (2)	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{キ}{ク}$ (2)	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{ケ}{コ}$ (2)	$\frac{3}{2}$	
	$\frac{サ}{シ}$ (2)	$\frac{5}{3}$	
	$\frac{ス}{セ}$ (3)	$\frac{2}{5}$	
	ソ (2)	①	
	$\frac{タチ}{ツテ}$ (3)	$\frac{32}{25}$	
小計			

問題番号（配点）	解答記号（配点）	正解	自己採点欄
第4問 (20)	$\frac{ア}{イウ}$ (2)	$\frac{1}{28}$	
	$\frac{エ}{オカ}$ (2)	$\frac{1}{42}$	
	$\frac{キ}{クケ}$ (2)	$\frac{5}{14}$	
	$\frac{コ}{サシス}$ (2)	$\frac{5}{126}$	
	$\frac{セ}{ソタ}$ (2)	$\frac{2}{63}$	
	$\frac{チ}{ツ}$ (2)	$\frac{1}{6}$	
	$\frac{テト}{ナニ}$ (3)	$\frac{17}{21}$	
	$\frac{ヌ}{ネノ}$ (3)	$\frac{1}{30}$	
	ハ (2)	①	
小計			
合計			

解説

第1問

〔1〕（数学Ⅰ　数と式／集合と命題）

Ⅰ $\boxed{1}$，Ⅱ $\boxed{2}$　　【難易度…★】

(1)　$a+b\sqrt{3}=0$　……①

$b\neq0$ と仮定すると

$$\sqrt{3}=-\frac{a}{b}$$

$-\frac{a}{b}$ は有理数であるから，$\sqrt{3}$ が無理数であることと矛盾する。ゆえに，$b=0$ であり，このとき①より $a=0$ である。

したがって，命題Aは真である。

また，命題Bは偽である。（反例：$a=2$，$b=-1$）

よって，A，Bの真偽の組合せとして正しいものは　⓪

a，b を有理数，n を自然数とするとき

- $a+b\sqrt{n}=0 \Longrightarrow a=b=0$ は偽
  （反例：$a=2$，$b=-1$，$n=4$）
- $a=b=0 \Longrightarrow a+b\sqrt{n}=0$ は真

よって，$a+b\sqrt{n}=0$ であることは $a=b=0$ であるための必要条件であるが，十分条件ではない（⓪）。

(2)　α，β がともに「0でない有理数」であるとき

$$\alpha=\frac{p}{q},\ \beta=\frac{r}{s}\quad (p,\ q,\ r,\ s \text{ は0でない整数})$$

と表される。このとき

$$\alpha+\beta=\frac{ps+qr}{qs},\ \alpha\beta=\frac{pr}{qs},\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{ps}{qr}$$

となり，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$ はすべて有理数である。

よって，与えられた命題は真である（⓪）。

・$\alpha=2\sqrt{3}$，$\beta=\sqrt{3}$ のとき

$$\alpha+\beta=3\sqrt{3},\ \alpha\beta=6,\ \frac{\alpha}{\beta}=2$$

となり，$\alpha+\beta$ は無理数で，$\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$ は有理数である（④）。

・$\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$ のとき

$$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=4-3=1$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}=7+4\sqrt{3}$$

となり，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ は有理数であり，$\frac{\alpha}{\beta}$ は無理数である（①）。

α，β を0でない実数として

p：$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$ はすべて無理数

q：α，β はともに無理数

とおくと

$\overline{p}$：$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}$ の少なくとも一つは有理数

$\overline{q}$：α，β の少なくとも一方は有理数

であり

$q \Longrightarrow p$ は偽なので　$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ も偽

（反例：$\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$）

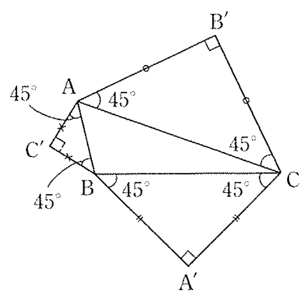
$p \Longrightarrow q$ は偽なので　$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ も偽

（反例：$\alpha=\sqrt{3}$，$\beta=1$）

よって，$\overline{p}$ は $\overline{q}$ であるための必要条件でも十分条件でもない（③）。

〔2〕（数学Ⅰ　図形と計量）

Ⅳ $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$　　【難易度…★★】



(1)　$\cos A=\frac{1}{2}$ より $A=60°$ であるから

$$\sin A=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad (⑤)$$

であり，△ABCの面積は

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot8\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{6\sqrt{3}}$$

である。

△ABCに余弦定理を用いると

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=8^2+3^2-2\cdot8\cdot3\cdot\frac{1}{2}$$
$$=49$$

である。よって

$$a=\mathbf{7}$$

である。

$\angle$A′BC$=45°$ であるから

$$\sin\angle \text{A′BC}=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad (④)$$

である。また

$$\text{A′B}=a\cos\angle\text{A′BC}=7\cos 45°=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

であり，A′C＝A′B であるから，△A′BCの面積は

$$\frac{1}{2}\text{A′B}\cdot\text{A′C}=\frac{1}{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2=\mathbf{\frac{49}{4}}$$

である。

(2)　$\text{A′B}=a\cos\angle\text{A′BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

であり，A′C＝A′B であるから

$$S_1=\frac{1}{2}\text{A′B}\cdot\text{A′C}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}a^2\quad (⑥)$$

である。同様に，$\text{B′C}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$，$\text{C′A}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$ であるから

$$S_2=\frac{1}{4}b^2,\ S_3=\frac{1}{4}c^2$$

である。

$$\angle\text{B′CA′}=\angle\text{ACB}+\angle\text{A′CB}+\angle\text{ACB′}$$
$$=C+45°+45°$$
$$=90°+C\quad (①)$$

であるから

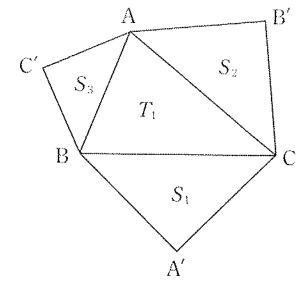
$$\sin\angle\text{B′CA′}=\sin(90°+C)$$
$$=\sin(180°-(90°+C))$$
$$=\sin(90°-C)=\cos C\quad (②)$$

である。また，$\text{A′C}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$\text{B′C}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$ であるから

$$S_3{}'=\frac{1}{2}\text{A′C}\cdot\text{B′C}\sin\angle\text{B′CA′}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}b\cos C$$
$$=\frac{1}{4}ab\cos C\quad (③)$$

である。

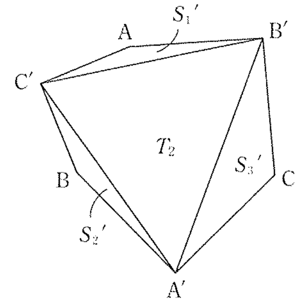
(3)



六角形 AC′BA′CB′ の面積は

$$(S_1+S_2+S_3)+T_1\quad (⓪)$$

と表すことができる。



また，△ABCは鋭角三角形であるから，六角形 AC′BA′CB′ の面積は

$$(S_1{}'+S_2{}'+S_3{}')+T_2\quad (⓪)$$

と表すことができる。

したがって

$$(S_1+S_2+S_3)+T_1=(S_1{}'+S_2{}'+S_3{}')+T_2$$
$$\therefore\ T_1-T_2=(S_1{}'+S_2{}'+S_3{}')-(S_1+S_2+S_3)$$

である。ここで，(2)より

$$S_1+S_2+S_3=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

である。また，△ABCに余弦定理を用いると

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

であるから，(2)より

$$S_3{}'=\frac{1}{4}ab\cos C=\frac{1}{8}(a^2+b^2-c^2)$$

である。同様に

$$S_1{}'=\frac{1}{8}(b^2+c^2-a^2),\ S_2{}'=\frac{1}{8}(c^2+a^2-b^2)$$

であるから

$$S_1{}'+S_2{}'+S_3{}'=\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2)$$

である。よって

$$T_1 - T_2 = (S_1' + S_2' + S_3') - (S_1 + S_2 + S_3)$$
$$= \frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$$
$$= -\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2) \quad (⑦)$$

である。

第2問

〔1〕（数学Ⅰ　データの分析）

Ⅴ $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$　【難易度…★★】

以下の解説では最小値，第1四分位数，第2四分位数（中央値），第3四分位数，最大値を，それぞれ m，Q_1，Q_2，Q_3，M と表す。

(1)⓪　同じ年における男子と女子の箱ひげ図の右側のひげの長さどうしを比較すると，どの年も男子の方が長い。よって，⓪は正しくない。

①　同じ年における男子と女子の四分位範囲どうしを比較すると，2015年，2018年，2019年は男子の方が小さい。よって，①は正しい。

②　女子の Q_3 が最も大きいのは2019年，男子の Q_1 が最も小さいのは2015年である。2019年の女子の Q_3 は，2015年の男子の Q_1 より大きい。よって，②は正しい。

③　2015年の女子の M は，2019年の女子の Q_3 より小さい。箱ひげ図に示されているのは24人のデータであるから，2015年の女子の優勝者と同じ総合得点を2019年の大会で得た女子選手がいたとすると，その選手は2019年の大会での女子の総合得点の上位6人には入らない。よって，③は正しくない。

④　2015年の男子について $Q_3<250$ であるから，250点未満の人数は24人の4分の3にあたる18人以上である。また，2016年から2019年のすべての年の男子について $Q_2<250$ であるから，250点未満の人数はどの年についても24人の半分にあたる12人以上である。よって，2015年から2019年までの男子の総合得点全体の結果について，250点未満の人数は $18+12\times4=66$ 人以上であることがわかる。のべ120人の Q_2 は小さい方から60人目と61人目の平均値なので，その値は250点より小さいといえる。よって，④は正しくない。

以上より，図1から読み取れることとして正しいものは　①，②

(2)　図1の箱ひげ図より，2017年の女子について

$150 \leqq m < 155$，$160 \leqq Q_1 < 165$，
$185 \leqq Q_2 < 190$，$195 \leqq Q_3 < 200$，
$230 \leqq M < 235$

である。これらすべてを満たすヒストグラムはbだけである（⓪）。

(3)　箱ひげ図より $Q_3 < 280 < 320 < M$ であるから，280点以上320点未満の人数が全体の4分の1にあたる6人以下（さらに詳細を見れば，そのうち得点が M の1人を除く5人以下）であることが判断できるが，280点以上320点未満である選手が1人もいなかったかどうかはわからない。

一方，ヒストグラムからは300点以上325点未満が1人であり，この1人の得点が M であることが読み取れるが，その値が320点未満かどうかは判断できない。しかし，箱ひげ図より $320<M$ であることと組み合わせると，ヒストグラムの300点以上325点未満の1人は320点以上だとわかる。

ヒストグラムより275点以上300点未満は0人であるから，275点以上325点未満には得点が M の選手1人しか存在しないことがわかり，280点以上320点未満の選手は1人もいなかったといえる（④）。

(4)(Ⅰ)　黒丸と白丸をあわせたものは右上がりの帯をつくるように分布しており，技術点と演技構成点には正の相関があると言える。正の相関がある二つの変量の相関係数は正の値である。よって，正しい。

(Ⅱ)　技術点が150点未満の選手（白丸）については，技術点と演技構成点には正の相関があると言える。一方，技術点が150点以上の選手（黒丸）については，技術点と演技構成点には明瞭な相関が読み取れない。よって，正しくない。

(Ⅲ)　技術点が150点以上の選手のうち，演技構成点が130点未満の人が2人いて，技術点が150点未満の選手のうち演技構成点が130点以上の人が1人いる。よって，正しくない。

以上より，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは　③

(5)　$Z=X+Y$ は $Y=-X+Z$ と表せるので，Z は図4において右下がりの直線の切片に対応する。また，$W=\dfrac{Y}{X}$ は $Y=WX$ と表せるので，W は図4において右上がりの直線の傾きに対応する。

これらのことを踏まえると，W が最大の選手（傾き2.2の直線と傾き2.4の直線の間の白丸，すなわちショートプログラム約60点，フリースケーティング約140点の選手）をA選手とすると，A選手の総合得点 Z は約200である。

一方，W が最小の選手（傾き1.6の直線より下側の白丸，すなわちショートプログラム約70点，フリースケーティング約110点の選手）をB選手とすると，B選手の総合得点 Z は約180である。

よって，横軸に Z，縦軸に W をとった散布図上では，一番上に位置するA選手と比べて，一番下に位置するB選手は左側に位置している。

また，A選手より Z の大きな選手は，Z が200より大きな（切片が200の直線より上側に白丸がある）3人と，Z が約200の（ショートプログラム約70点，フリースケーティング約130点の選手）1人の，あわせて4人である。

よって，横軸に Z，縦軸に W をとった散布図上では，A選手と比べて右側に位置する選手は4人である。

以上より，最も適当な散布図は　①

〔2〕（数学Ⅰ　2次関数／集合と命題）

Ⅱ $\boxed{2}$，Ⅲ $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{6}$　【難易度…★★】

$f(x)$ は x^2 の係数が1であり，$y=f(x)$ のグラフ C は x 軸と2点 $(9\pm3\sqrt{7},\ 0)$ で交わるから

$$f(x)=(x-9+3\sqrt{7})(x-9-3\sqrt{7})$$
$$=(x-9)^2-63$$

と表せる。したがって

$$\boldsymbol{a=9},\quad \boldsymbol{b=63}$$

(1)　$f(x)<106$ のとき

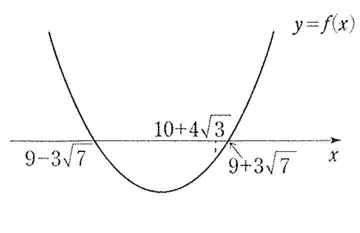
$$(x-9)^2-63<106$$
$$(x-9)^2<169$$
$$-13<x-9<13$$
$$\boldsymbol{-4<x<22}$$

(2)

$$f(10+4\sqrt{3})=(1+4\sqrt{3})^2-63$$
$$=\boldsymbol{8\sqrt{3}-14}$$
$$=2(\sqrt{48}-\sqrt{49})<0 \quad (⓪)$$

であるから，下の図より

$$10+4\sqrt{3}<9+3\sqrt{7} \quad (⓪)$$

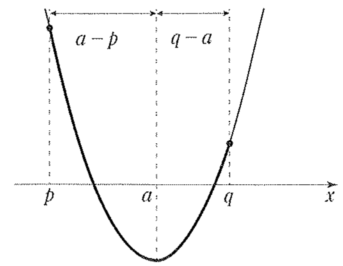


(3)　$0<10+4\sqrt{3}<9+3\sqrt{7}$ であるから

$$0<q-a<a-p$$

したがって，$p\leqq x\leqq q$ における $y=f(x)$ のグラフは下の図のようになるので，$f(x)$ の最大値は

$$f(p)=f(-3\sqrt{7})$$
$$=(-3\sqrt{7}-9)^2-63$$
$$=\boldsymbol{81+54\sqrt{7}}$$



(4)　D は点 $(10,\ -63+t)$ を頂点とする放物線であり，x^2 の係数は1であるから

$$g(x)=(x-10)^2-63+t$$

である。

(i)　D が点 $(9-3\sqrt{7},\ 0)$ を通るとき

$$0=(-1-3\sqrt{7})^2-63+t$$
$$\boldsymbol{t=-1-6\sqrt{7}}$$

(ii)　$f(x)\geqq0$ であることが $g(x)\geqq0$ であるための必要条件となるのは

$$\{x\,|\,f(x)\geqq0\}\supset\{x\,|\,g(x)\geqq0\}$$

であるときであるから

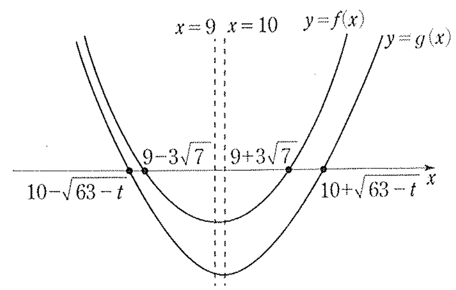
$$g(9-3\sqrt{7})\leqq0 \quad かつ \quad g(9+3\sqrt{7})\leqq0$$

$y=g(x)$ のグラフの軸が $x=10(>9)$ であるから

$$g(9+3\sqrt{7})<g(9-3\sqrt{7})$$

であり，$g(9-3\sqrt{7})\leqq0$ ならば $g(9+3\sqrt{7})\leqq0$ は成り立つから，求める t の値の範囲は

$$g(9-3\sqrt{7})\leqq0$$
$$(-1-3\sqrt{7})^2-63+t\leqq0$$
$$t\leqq-1-6\sqrt{7} \quad (①)$$



(注) $g(x)<0$ なる実数 x が存在するのは $t<63$ のときで，このとき $g(x)<0$ の解は

$$10-\sqrt{63-t}<x<10+\sqrt{63-t}$$

となる。

$$\{x\,|\,f(x)<0\}\subset\{x\,|\,g(x)<0\}$$

すなわち

$$\{x\,|\,9-3\sqrt{7}<x<9+3\sqrt{7}\}\subset\{x\,|\,10-\sqrt{63-t}<x<10+\sqrt{63-t}\}$$

となるのは

$$10-\sqrt{63-t}\leqq 9-3\sqrt{7}$$

かつ　$9+3\sqrt{7}\leqq 10+\sqrt{63-t}$

のときであるから

$1+3\sqrt{7}\leqq\sqrt{63-t}$　かつ　$-1+3\sqrt{7}\leqq\sqrt{63-t}$

$-1+3\sqrt{7}<1+3\sqrt{7}$ より

$$1+3\sqrt{7}\leqq\sqrt{63-t}$$

両辺が正より，両辺を2乗して

$$64+6\sqrt{7}\leqq 63-t$$

これより

$$t\leqq -1-6\sqrt{7}$$

となる。

第3問 (数学A 図形の性質)

Ⅵ $\boxed{1}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$　【難易度…★】

(1) **構想1について**

点 O_1 が $\angle AKB$ の二等分線上にあることを示すには

$$\triangle AKO_1\equiv\triangle BKO_1\quad(②,\ ③)$$

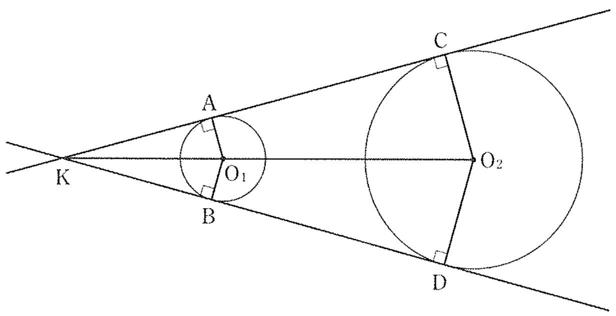
を示せばよい(これは，$O_1A=O_1B$，KO_1 は共通，$\angle O_1AK=\angle O_1BK=90^\circ$ から示される)。

また，点 O_2 が $\angle CKD$ の二等分線上にあることを示すには

$$\triangle CKO_2\equiv\triangle DKO_2\quad(⑥,\ ⑦)$$

を示せばよい(これも上と同様である)。

よって，$\angle AKO_1=\angle CKO_2$ であるから，3点 K，O_1，O_2 は同一直線上にある。



(2) **構想2について**

対頂角は等しいから

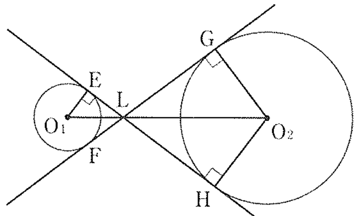
$$\angle ELF=\angle GLH$$

また，**構想1**と同様の考えにより

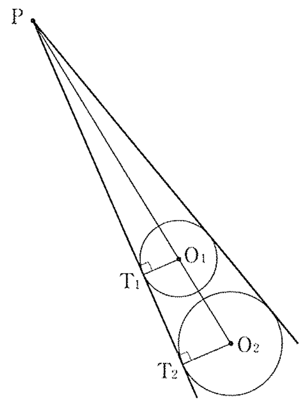
$$\angle ELO_1=\frac{1}{2}\angle ELF$$

$$\angle HLO_2=\frac{1}{2}\angle GLH$$

よって，$\angle ELO_1=\angle HLO_2$ であるから，3点 L，O_1，O_2 は同一直線上にある。



(3) 2つの円 O_1，O_2 の共通外接線の1本と円 O_1，O_2 の接点をそれぞれ T_1，T_2 とする。

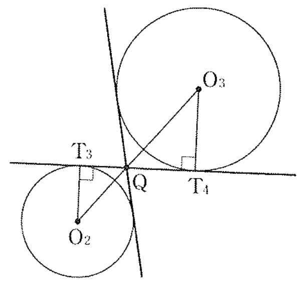


$O_1T_1\perp T_1T_2$，$O_2T_2\perp T_1T_2$ から

$$\triangle PT_1O_1\backsim\triangle PT_2O_2$$

よって　$\dfrac{PO_2}{PO_1}=\dfrac{O_2T_2}{O_1T_1}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

次に，2つの円 O_2，O_3 の共通内接線の1本と円 O_2，O_3 の接点をそれぞれ T_3，T_4 とする。



$O_2T_3\perp T_3T_4$，$O_3T_4\perp T_3T_4$ から

$$\triangle QT_3O_2\backsim\triangle QT_4O_3$$

よって　$\dfrac{QO_3}{QO_2}=\dfrac{O_3T_4}{O_2T_3}=\mathbf{\dfrac{5}{3}}$

$\triangle O_1O_2O_3$ と直線 PQ について，メネラウスの定理を用いると

$$\frac{O_2P}{PO_1}\cdot\frac{O_1T}{TO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_2}=1$$

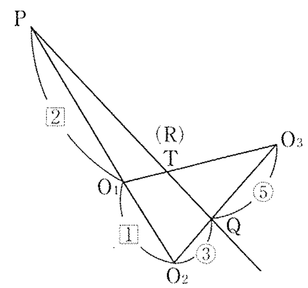
$$\frac{3}{2}\cdot\frac{O_1T}{TO_3}\cdot\frac{5}{3}=1$$

よって　$\dfrac{TO_1}{TO_3}=\mathbf{\dfrac{2}{5}}$　……①

また，R は2つの円 O_3，O_1 の共通内接線の交点であるから

$$\frac{RO_1}{RO_3}=\frac{2}{5}\quad\cdots\cdots②$$

①，②から $\dfrac{RO_1}{RO_3}=\dfrac{TO_1}{TO_3}$ であり，2点 R，T は線分 O_1O_3 上にあるから，この2点は一致する。



よって，点 R は直線 PQ 上にある(⓪)。

次に，$\triangle PO_2Q$ と直線 O_1O_3 について，メネラウスの定理を用いると

$$\frac{O_2O_3}{O_3Q}\cdot\frac{QR}{RP}\cdot\frac{PO_1}{O_1O_2}=1$$

$$\frac{8}{5}\cdot\frac{QR}{RP}\cdot\frac{2}{1}=1$$

よって　$\dfrac{QR}{RP}=\dfrac{5}{16}$

したがって

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\triangle O_1PR}{\triangle O_3QR}=\frac{\frac{1}{2}RO_1\cdot RP\sin\angle O_1RP}{\frac{1}{2}RO_3\cdot RQ\sin\angle O_3RQ}$$

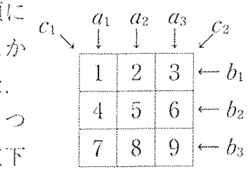
$$=\frac{RO_1}{RO_3}\cdot\frac{RP}{RQ}$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{16}{5}=\mathbf{\frac{32}{25}}$$

第4問 (数学A 場合の数と確率)

Ⅶ $\boxed{3}\boxed{5}\boxed{7}\boxed{8}$　【難易度…★★】

以下では，縦の一列を左から順に a_1，a_2，a_3 とし，横の一列を上から順に b_1，b_2，b_3 とする。また，5番のパネルを通る斜めの列について，右下がりの一列を c_1，左下がりの一列を c_2 とする。



(1) この試行を3回行うとき，球の取り出し方の総数は ${}_9P_3$ 通りであり，これらは同様に確からしい。

A が起こるのは，3枚すべてに穴があいている列が a_1，a_2，a_3 のいずれかであるときである。列が一つ決まると球を取り出す順番は $3!$ 通りあるから，A が起こる確率は

$$\frac{3\times3!}{{}_9P_3}=\mathbf{\frac{1}{28}}$$

である。C が起こるのは，3枚すべてに穴があいている列が c_1，c_2 のいずれかであるときである。列が一つ決まると球を取り出す順番は $3!$ 通りあるから，C が起こる確率は

$$\frac{2\times3!}{{}_9P_3}=\mathbf{\frac{1}{42}}$$

である。B が起こる確率は A が起こる確率と同様に $\dfrac{1}{28}$ であり，A，B，C は互いに排反であるから，点数の期待値は

$$3\left(\frac{1}{28}+\frac{1}{28}\right)+6\cdot\frac{1}{42}=\mathbf{\frac{5}{14}}\ (点)$$

である。

(2) この試行を5回行うとき，球の取り出し方の総数は ${}_9P_5$ 通りであり，これらは同様に確からしい。

5番のパネルに穴があいており，かつ A，B がともに起こるのは，3枚すべてに穴があいている列が

a_1 と b_2，a_2 と b_1，a_2 と b_2，a_2 と b_3，a_3 と b_2

のいずれかとなるときである。列が二つ決まると球の取り出す順番は $5!$ 通りあるから，5番のパネルに穴があいており，かつ A，B がともに起こる確率は

$$\frac{5\times5!}{{}_9P_5}=\mathbf{\frac{5}{126}}$$

である。また，5番のパネルに穴があいておらず，かつ A，B がともに起こるのは，3枚すべてに穴があいている列が

a_1 と b_1，a_1 と b_3，a_3 と b_1，a_3 と b_3

のいずれかとなるときである。列が二つ決まると球の取り出す順番は $5!$ 通りあるから，5番のパネルに穴が

あいておらず，かつ A，B がともに起こる確率は

$$\frac{4\times5!}{{}_9\mathrm{P}_5}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{63}}$$

である。

A，B がともに起こるような二列の組合せは $5+4=9$ 通りある。また，A，C がともに起こるような二列の組合せは $3\times2=6$ 通りあり，B，C がともに起こるような二列の組合せも同様に6通りある。よって，A，B，C のうちいずれか二つが起こるような二列の組合せは

$$9+6+6=21 \text{ 通り}$$

ある。列が二つ決まると球の取り出す順番は $5!$ 通りあるから，A，B，C のうちいずれか二つの事象が起こる確率は

$$\frac{21\times5!}{{}_9\mathrm{P}_5}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

である。C が起こると5番のパネルには必ず穴があいていることに注意すると，A，B，C のうちいずれか二つの事象が起こるという条件のもとで，5番のパネルに穴があいている条件付き確率 p_1 は

$$p_1=\frac{\dfrac{(5+6+6)\times5!}{{}_9\mathrm{P}_5}}{\dfrac{21\times5!}{{}_9\mathrm{P}_5}}=\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{21}}$$

である。

(3) (2)と同様に5回の試行において，4回目の試行を終えた時点では A，B，C のいずれの事象も起こっておらず，かつ5回目の試行を終えた時点で初めて A，B，C のうちいずれか二つの事象が起こっているのは，5回目の試行を終えた時点で A，B，C のうちいずれか二つの事象が起こり，かつ5回目に二つの列に共通するパネルに穴があくときである。二つの列が決まると二つの列に共通するパネルは1通りに定まる。このことに注意すると，求める確率は

$$\frac{21\times4!\cdot1}{{}_9\mathrm{P}_5}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{30}}$$

である。よって，「4回目の試行を終えた時点で A，B，C のいずれの事象も起こっておらず，かつ5回目の試行を終えた時点で初めて A，B，C のうちいずれか二つの事象が起こっている」という条件のもとで，5番のパネルに穴があいている条件付き確率 p_2 は

$$p_2=\frac{\dfrac{(5+6+6)\times4!\cdot1}{{}_9\mathrm{P}_5}}{\dfrac{21\times4!\cdot1}{{}_9\mathrm{P}_5}}=\frac{17}{21}$$

となり，$p_1=p_2$ である（**0**）。

第 3 回

実 戦 問 題

解答・解説