高2理系数学総合S　確認テスト　冬期第3講

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点　　／ 10

$\boxed{1}$ （10点）

a は正の定数とする。パラメータ θ で表された曲線 C：$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ について，

$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ で表せ。また，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ における法線の方程式を求めよ。

高2理系数学総合S　確認テスト　冬期第3講【解答】

$\boxed{1}$ （10点）

解答　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{a(1-\cos\theta)^2}$，

法線　$y=-(2-\sqrt{3})x+\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}\pi a$

$\boxed{1}$ （10点）

$$\frac{dx}{d\theta}=a-a\cos\theta=a(1-\cos\theta),\qquad \frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$$

よって　$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=a\sin\theta\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$ 」3点

ゆえに　$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta-1}{a(1-\cos\theta)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}$$ 」3点

また，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$x=a\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right),\quad y=a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$ 」2点

したがって，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ における法線の方程式は

$$y-a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-(2-\sqrt{3})\left\{x-a\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

すなわち　$$y=-(2-\sqrt{3})x+\frac{2-\sqrt{3}}{6}\pi a$$ 」2点