1

解答　$\dfrac{(\text{アイ})}{(\text{ウエ})}$　$\dfrac{17}{15}$　(オ)　4　$\dfrac{(\text{カ})}{(\text{キ})}$　$\dfrac{4}{5}$　$\dfrac{(\text{ク})}{(\text{ケ})}$　$\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{(\text{コ})\sqrt{(\text{サ})}}{(\text{シ})}$　$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{(\text{ス})\sqrt{(\text{セ})}}{(\text{ソ})}$　$\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

解説

2 倍角の公式により　$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\beta-1=2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)-2$

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=\dfrac{4}{15}$ であるから　$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)-2=\dfrac{4}{15}$

よって　$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\dfrac{^{\text{アイ}}17}{_{\text{ウエ}}15}$

また，② から　$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{2^2\cdot 15}{15^2}=\dfrac{^{\text{オ}}4}{15}$

したがって，解と係数の関係により，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ は，t に関する 2 次方程式

$t^2-\dfrac{17}{15}t+\dfrac{4}{15}=0$ の解である。

これを解くと　$15t^2-17t+4=0$

$(5t-4)(3t-1)=0$

よって　$t=\dfrac{4}{5},\ \dfrac{1}{3}$

条件 ③ より，$|\cos\alpha|\geqq|\cos\beta|$ であるから　$\cos^2\alpha\geqq\cos^2\beta$

よって　$\cos^2\alpha=\dfrac{^{\text{カ}}4}{_{\text{キ}}5}$，$\cos^2\beta=\dfrac{^{\text{ク}}1}{_{\text{ケ}}3}$

② より，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ は異符号である。

また，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$\alpha<\beta$ より，$\cos\beta<\cos\alpha$ であるから

$\cos\alpha>0$，$\cos\beta<0$

したがって　$\cos\alpha=\dfrac{^{\text{コ}}2\sqrt{^{\text{サ}}5}}{_{\text{シ}}5}$，$\cos\beta=\dfrac{^{\text{ス}}-\sqrt{^{\text{セ}}3}}{_{\text{ソ}}3}$

2

解答　(ア)　0　$\dfrac{(\text{イ})}{(\text{ウ})}$　$\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{(\text{エ})}{(\text{オ})}$　$\dfrac{1}{3}$　(カ)　1　$\dfrac{(\text{キ})}{(\text{ク})}$　$\dfrac{1}{8}$　(ケ)　3

(コ)$\sqrt{(\text{サ})}$　$6\sqrt{6}$　(シ)$\sqrt{(\text{ス})}$　$2\sqrt{6}$　(セ)　⑥

解説

真数の条件により，$p>{}^{\text{ア}}0$ である。

線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot 0+1\cdot p}{1+2},\ \frac{2\cdot\frac{3}{2}+1\cdot\log_2 p}{1+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{^{\text{イ}}1}{_{\text{ウ}}3}p,\ \frac{^{\text{エ}}1}{_{\text{オ}}3}\log_2 p+{}^{\text{カ}}1\right)$$

これが C の座標と一致するから　$\begin{cases}\dfrac{1}{3}p=q & \cdots\cdots ④\\ \dfrac{1}{3}\log_2 p+1=\log_2 q & \cdots\cdots ⑤\end{cases}$　が成り立つ。

⑤ から　$\log_2 p^{\frac{1}{3}}+\log_2 2=\log_2 q$

よって　$2p^{\frac{1}{3}}=q$　すなわち　$p=\dfrac{^{\text{キ}}1}{_{\text{ク}}8}q^{^{\text{ケ}}3}$

これと，④ より　$p=\dfrac{1}{8}\cdot\left(\dfrac{1}{3}p\right)^3$

よって　$p^3-6^3p=0$　すなわち　$p(p^2-6^3)=0$

$p>0$ より　$p={}^{\text{コ}}6\sqrt{^{\text{サ}}6}$

したがって　$q=\dfrac{1}{3}\cdot 6\sqrt{6}={}^{\text{シ}}2\sqrt{^{\text{ス}}6}$

また，C の y 座標 $\log_2(2\sqrt{6})$ について

$$\log_2(2\sqrt{6})=\log_2 2+\log_2\sqrt{6}=1+\frac{1}{2}\log_2 6=1+\frac{1}{2}(\log_2 2+\log_2 3)$$

$$=1+\frac{1}{2}(1+\log_2 3)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3$$

ここで，底の変換公式により　$\log_2 3=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$　であるから

$$\log_2(2\sqrt{6})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{3}{2}+\frac{\log_{10}3}{2\log_{10}2}=1.5+\frac{0.4771}{2\times 0.3010}=2.2925\cdots$$

よって，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると　2.3　(${}^{\text{セ}}$ ⑥)

3

解答　(ア)　2　(イ)　1　(ウ)　2　(エ)　2　(オ)　1　(カ)　2　(キ)　1

(ク)　1　(ケ)　1　(コ)　4　(サ)　2　(シ)　4　(ス)　4　(セ)　2

(ソ)　0　(タ)　1　(チ)　2　(ツ)　2　(テ)　3　$\dfrac{(\text{ト})}{(\text{ナ})}$　$\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{(\text{ニ})}{(\text{ヌネ})}$　$\dfrac{8}{27}$　$\dfrac{(\text{ノ})}{(\text{ハ})}$　$\dfrac{7}{3}$　(ヒ)　3　(フ)　a　(ヘ)　②

解説

(1)　C 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は，$y'=2x$ より

$$y-(t^2+1)=2t(x-t) \qquad \text{すなわち} \qquad y={}^{\text{ア}}2tx-t^2+{}^{\text{イ}}1$$

この直線が P を通るとすると，t は方程式

$$2a=2t\cdot a-t^2+1 \qquad \text{すなわち} \qquad t^2-{}^{\text{ウ}}2at+{}^{\text{エ}}2a-{}^{\text{オ}}1=0$$

を満たす。

これを解くと　$\{t-(2a-1)\}(t-1)=0$

よって　$t={}^{\text{カ}}2a-{}^{\text{キ}}1,\ {}^{\text{ク}}1$

P を通る C の接線が 2 本存在するための条件は，この 2 次方程式が相異なる 2 つの実数解をもつことより　$2a-1\neq 1$　すなわち　$a\neq {}^{\text{ケ}}1$

このとき，それら 2 本の接線の方程式は

$t=2a-1$ のとき　$y=2(2a-1)x-(2a-1)^2+1$

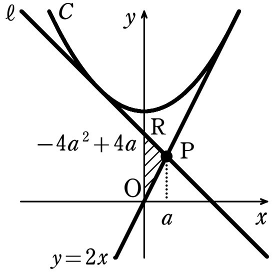
すなわち　$y=({}^{\text{コ}}4a-{}^{\text{サ}}2)x-{}^{\text{シ}}4a^2+{}^{\text{ス}}4a$

また，$t=1$ のとき　$y=2\cdot 1\cdot x-1^2+1$　すなわち　$y={}^{\text{セ}}2x$

(2)　直線 $y=(4a-2)x-4a^2+4a$ を ℓ とする。

ℓ と y 軸との交点を R $(0,\ r)$ とすると

$$r=-4a^2+4a$$



よって，$r>0$ となるための条件は　$-4a^2+4a>0$

すなわち　$a(a-1)<0$

したがって ${}^{\text{ソ}}0<a<{}^{\text{タ}}1$ である。

このとき，三角形 OPR の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot(-4a^2+4a)\cdot a={}^{\text{チ}}2(a^{{}^{\text{ツ}}2}-a^{{}^{\text{テ}}3})$$

ゆえに　$S'=2(2a-3a^2)=2a(2-3a)$

$S'=0$ とすると，$0<a<1$ より　$a=\dfrac{2}{3}$

よって，S の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	$\frac{8}{27}$	↘	

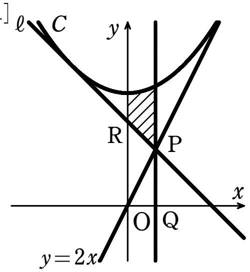
したがって，S は $a=\dfrac{{}^{\text{ト}}2}{{}^{\text{ナ}}3}$ のとき，最大値 $\dfrac{{}^{\text{ニ}}8}{{}^{\text{ヌネ}}27}$ をとる。

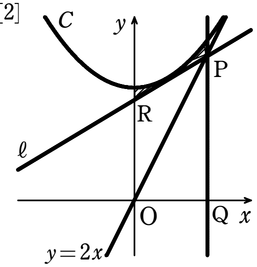
(3)　直線 $x=a$ と x 軸との交点を Q とする。

$0<a<1$ のとき，放物線 C と (2) の直線 ℓ および 2 直線 $x=0$，$x=a$ で囲まれた図形は

$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，右の図 [1] のようになり，

$\dfrac{1}{2}<a<1$ のとき，右の図 [2] のようになる。

[1]


[2]


よって，求める面積 T は

$$T=\int_0^a(x^2+1)dx-(\text{台形 ORPQ})$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^a-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\{2a+(-4a^2+4a)\}$$

$$=\frac{{}^{ノ}7}{{}^{ハ}3}a^3-{}^{ヒ}3a^2+{}^{フ}a$$

$T'=7a^2-6a+1$ より，$T'=0$ のとき　$a=\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{7}$

よって，T の増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{2}}{7}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$	$\cdots$	1
T'		$+$	0	$-$	0	$+$	
T		↗	極大	↘	極小	↗	

ここで，$\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{3\sqrt{2}-5}{21}<0$ より　$\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}<\dfrac{2}{3}$

したがって，$\dfrac{2}{3}\leqq a<1$ の範囲において，T は増加する。　(ヘ ②)

$\boxed{4}$

解答　(ア)　8　(イ)　7　(ウ)　a　(エ)　a　(オ)　a　(カ)　b　(キ)　a
(ク)　3　(ケ)　2　(コ)　4　(サシ)　16　(ス)　1　(セ)　1
(ソ)　3　(タ)　2　(チ)　9　(ツ)　2　$\dfrac{(\text{テト})}{(\text{ナ})}$　$\dfrac{32}{9}$

解説

(1)　数列 $\{s_n\}$ は，初項 1，公比 2 の等比数列であるから

$$s_1=1,\ s_2=1\cdot2=2,\ s_3=2\cdot2=4$$

よって　$s_1s_2s_3=1\cdot2\cdot4={}^{ア}8$，　$s_1+s_2+s_3=1+2+4={}^{イ}7$

(2)　数列 $\{s_n\}$ は，初項 x，公比 r の等比数列であるから　$s_n=xr^{n-1}$

よって　$s_1=x$，$s_2=xr$，$s_3=xr^2$

ゆえに　$s_1s_2s_3=x\cdot xr\cdot xr^2=x^3r^3$

$s_1+s_2+s_3=x+xr+xr^2=x(1+r+r^2)$

① から　$x^3r^3=a^3$

r，x，a はすべて実数であるから　$xr={}^{ウ}a$

② から　$x(1+r+r^2)=b$

両辺に r を掛けて　$xr(1+r+r^2)=br$　　よって　$a(1+r+r^2)=br$

整理すると　${}^{エ}ar^2+({}^{オ}a-{}^{カ}b)r+{}^{キ}a=0$

$a\fallingdotseq0$ であるから，2 次方程式 ④ の判別式を D とすると

$$D=(a-b)^2-4a^2=-3a^2-2ab+b^2$$

④ を満たす実数 r が存在するための条件は $D\geqq0$ であるから　$-3a^2-2ab+b^2\geqq0$

よって　${}^{ク}3a^2+{}^{ケ}2ab-b^2\leqq0$

(3)　$a=64$，$b=336$ のとき，(2) から実数 r は　$64r^2+(64-336)r+64=0$　を満たす。

整理すると　$4r^2-17r+4=0$　　すなわち　$(r-4)(4r-1)=0$

よって　$r=4,\ \dfrac{1}{4}$

$r>1$ であるから　$r={}^{コ}4$

③ から　$x=\dfrac{64}{4}={}^{サシ}16$

したがって，数列 $\{s_n\}$ の一般項は　$s_n=16\cdot4^{n-1}=4^{n+1}$

よって，数列 $\{t_n\}$ の一般項は　$t_n=s_n\log_4 s_n=4^{n+1}\log_4 4^{n+1}=(n+{}^{ス}1)\cdot4^{n+{}^{セ}1}$

数列 $\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n は

$$U_n=2\cdot4^2+3\cdot4^3+\cdots\cdots+n\cdot4^n+(n+1)\cdot4^{n+1}\qquad\cdots\cdots⑥$$

を満たす。

⑥×4 から　$4U_n = 2\cdot4^3+3\cdot4^4+\cdots\cdots+n\cdot4^{n+1}+(n+1)\cdot4^{n+2}$　……⑦

⑥−⑦ から　$-3U_n=2\cdot4^2+4^3+4^4+\cdots\cdots+4^{n+1}-(n+1)\cdot4^{n+2}$

$$=32+\frac{4^3(4^{n-1}-1)}{4-1}-(n+1)\cdot4^{n+2}$$

$$=\frac{96+4^{n+2}-64-(3n+3)\cdot4^{n+2}}{3}=\frac{32-(3n+2)\cdot4^{n+2}}{3}$$

したがって　$U_n=-\frac{32-(3n+2)\cdot4^{n+2}}{3\cdot3}=\frac{{}^{\text{ソ}}3n+{}^{\text{タ}}2}{{}^{\text{チ}}9}\cdot4^{n+{}^{\text{ツ}}2}-\frac{{}^{\text{テト}}32}{{}^{\text{ナ}}9}$

$\boxed{5}$

解答　(ア) 1　$\sqrt{(\text{イ})}$ $\sqrt{3}$　$-$(ウ) -2　$-\frac{(\text{エ})}{(\text{オ})}$ $-\frac{5}{2}$　$\frac{\sqrt{(\text{カ})}}{(\text{キ})}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ク) 1　$\sqrt{(\text{ケ})}$ $\sqrt{3}$　$\frac{(\text{コ})}{(\text{サ})}$ $\frac{4}{3}$　$\frac{(\text{シ})}{(\text{ス})}$ $\frac{2}{3}$　$-\frac{(\text{セ})}{(\text{ソ})}$ $-\frac{4}{3}$

$\frac{(\text{タ})\sqrt{(\text{チ})}}{(\text{ツ})}$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(テ) 2　(ト) a　$\sqrt{(\text{ナ})}$ $\sqrt{3}$　(ニ) $-$

(ヌ) 2　(ネ) 1　(ノ) 2　(ハ) a　$\pm\frac{(\text{ヒ})}{(\text{フヘ})}$ $\pm\frac{5}{12}$

解説

(1)　$\angle AOB=60°$ であるから，点 B の座標は　$(2\cos60°,\ 2\sin60°)$

すなわち　$({}^{\text{ア}}1,\ \sqrt{{}^{\text{イ}}3})$

点 D は x 軸上にあるから，点 D の座標は　$(-{}^{\text{ウ}}2,\ 0)$

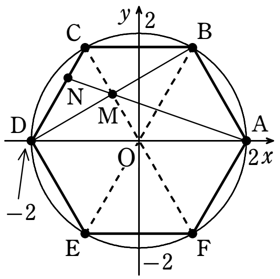
(2)　点 M は線分 BD の中点であるから，点 M の座標は

$$\left(\frac{1+(-2)}{2},\ \frac{\sqrt{3}+0}{2}\right)$$

すなわち　$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって　$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{2}-2,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)$

$$=\left(-\frac{{}^{\text{エ}}5}{{}^{\text{オ}}2},\ \frac{\sqrt{{}^{\text{カ}}3}}{{}^{\text{キ}}2}\right)$$



また，DC∥OB，DC＝OB であるから　$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OB}=({}^{\text{ク}}1,\ \sqrt{{}^{\text{ケ}}3})$

したがって，$\overrightarrow{ON}$ は実数 r，s を用いて

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{AM}=(2,\ 0)+r\left(-\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(2-\frac{5}{2}r,\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}+s\overrightarrow{DC}=(-2,\ 0)+s(1,\ \sqrt{3})=(-2+s,\ \sqrt{3}s)$$

と表せる。

よって　$2-\frac{5}{2}r=-2+s$　……①，$\frac{\sqrt{3}}{2}r=\sqrt{3}s$　……②

② から　$r=2s$　……③

$r=2s$ を ① に代入して　$2-\frac{5}{2}\cdot2s=-2+s$

整理すると　$6s=4$　　よって　$s=\frac{{}^{\text{シ}}2}{{}^{\text{ス}}3}$

③ から　$r=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{{}^{\text{コ}}4}{{}^{\text{サ}}3}$

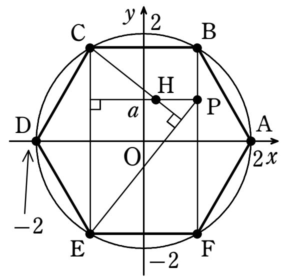
したがって　$\overrightarrow{ON}=\left(-2+\frac{2}{3},\ \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{{}^{\text{セ}}4}{{}^{\text{ソ}}3},\ \frac{{}^{\text{タ}}2\sqrt{{}^{\text{チ}}3}}{{}^{\text{ツ}}3}\right)$

(3)　点 B と点 E は原点に関して対称であるから，点 E の座標は　$(-1,\ -\sqrt{3})$

また，$\angle AOC=120°$ であるから，点 C の座標は

$(2\cos120°,\ 2\sin120°)$

すなわち　$(-1,\ \sqrt{3})$



点 C と点 F は原点に関して対称であるから，点 F の座標は　$(1,\ -\sqrt{3})$

点 P は線分 BF 上にあり，y 座標は a であるから，点 P の座標は　$(1,\ a)$

よって　$\overrightarrow{EP}=(1-(-1),\ a-(-\sqrt{3}))=({}^{\text{テ}}2,\ {}^{\text{ト}}a+\sqrt{{}^{\text{ナ}}3})$

点 H は点 P から直線 CE に引いた垂線上にあり，この垂線は x 軸に平行であるから，点 H の y 座標は a である。

点 H の x 座標を x_0 とおくと　$\overrightarrow{CH}=(x_0-(-1),\ a-\sqrt{3})=(x_0+1,\ a-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{EP}$ であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{EP}=0$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}}=(x_0+1)\cdot 2+(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})=2x_0+2+a^2-3=2x_0+a^2-1$

であるから　$2x_0+a^2-1=0$

ゆえに　$x_0=\dfrac{-a^2+1}{2}$

したがって，点 H の座標は　$\left(\dfrac{^{ニ}-a^{^{ヌ}2}+{}^{ネ}1}{^{ノ}2},\ {}^{ハ}a\right)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{1^2+a^2}=\sqrt{a^2+1}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{\left(\frac{-a^2+1}{2}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{a^4+2a^2+1}{2^2}}=\sqrt{\frac{(a^2+1)^2}{2^2}}=\frac{a^2+1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=1\cdot\frac{-a^2+1}{2}+a^2=\frac{a^2+1}{2}$$

であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}=\frac{a^2+1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{2}{a^2+1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ であるから　$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{12}{13}$

両辺を 2 乗して整理すると　$a^2+1=\left(\dfrac{13}{12}\right)^2$　　よって　$a^2=\dfrac{25}{12^2}=\left(\dfrac{5}{12}\right)^2$

したがって　$a=\pm\dfrac{^{ヒ}5}{^{フヘ}12}$

$\boxed{6}$

$\boxed{解答}$　(アイウ)　152　　$\dfrac{(エ)}{(オカ)}$　$\dfrac{8}{27}$　　(キ).(クケ)　1.25　　0.(コサ)　0.89

$\dfrac{(シ)}{(ス)}$　$\dfrac{1}{8}$　　$\dfrac{(セ)}{(ソ)}$　$\dfrac{a}{3}$　　$\dfrac{(タチ)}{(ツ)}$　$\dfrac{2a}{3}$　　(テ)　7

解説

(1)　確率変数 W は，n 回の反復試行において事象 A が起こる回数を表しているから，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

よって　$m=np,\ \sigma=\sqrt{np(1-p)}$

条件から　$np=\dfrac{1216}{27}$ ……①，　$\sqrt{np(1-p)}=\dfrac{152}{27}$ ……②

② から　$np(1-p)=\dfrac{152^2}{27^2}$

ゆえに，① から　$\dfrac{1216}{27}(1-p)=\dfrac{152^2}{27^2}$　　すなわち　$1-p=\dfrac{152^2}{27^2}\cdot\dfrac{27}{1216}$

よって　$1-p=\dfrac{19}{27}$　　ゆえに　$p=1-\dfrac{19}{27}=\dfrac{^{エ}8}{^{オカ}27}$

したがって，① から　$n=\dfrac{1216}{27}\cdot\dfrac{27}{8}={}^{アイウ}152$

(2)　$W\geqq 38$ となる確率を求める場合，n は大きいと考えられるので，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 W は，近似的に正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$\sigma>0$ であるから，$W\geqq 38$ のとき　$\dfrac{W-m}{\sigma}\geqq\dfrac{38-m}{\sigma}=\dfrac{38-\dfrac{1216}{27}}{\dfrac{152}{27}}=-1.25$

よって　$P(W\geqq 38)=P\left(\dfrac{W-m}{\sigma}\geqq -{}^{キ}1.{}^{クケ}25\right)$

さらに，標準正規分布の分布曲線が y 軸に関して対称であることから

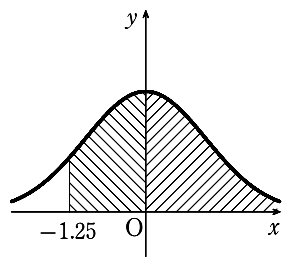
$$P(Z\geqq -1.25)=P(Z\geqq 0)+P(-1.25\leqq Z\leqq 0)$$
$$=0.5+P(0\leqq Z\leqq 1.25)$$

ここで，正規分布表より　$P(0\leqq Z\leqq 1.25)=0.3944$

であるから

$$P(Z\geqq -1.25)=0.5+0.3944=0.8944$$

よって　$P(Z\geqq -1.25)=0.{}^{コサ}89$



(3)　確率変数 X について，$a\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}a$ となる確率 $P\left(a\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}a\right)$ は

$$P\left(a\leqq X\leqq\frac{3}{2}a\right)=\int_a^{\frac{3}{2}a}f(x)\,dx=\int_a^{\frac{3}{2}a}\frac{1}{3a^2}(2a-x)\,dx=\frac{1}{3a^2}\left[2ax-\frac{1}{2}x^2\right]_a^{\frac{3}{2}a}$$

$$=\frac{1}{3a^2}\left[\left\{2a\cdot\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a\right)^2\right\}-\left(2a\cdot a-\frac{1}{2}a^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{3}{8}a^2=\frac{{}^{シ}1}{{}^{ス}8}$$

また，確率変数 X の平均は

$$E(X)=\int_{-a}^{2a}xf(x)\,dx=\int_{-a}^{0}x\cdot\frac{2}{3a^2}(x+a)\,dx+\int_{0}^{2a}x\cdot\frac{1}{3a^2}(2a-x)\,dx$$

$$=\frac{2}{3a^2}\int_{-a}^{0}x(x+a)\,dx+\frac{1}{3a^2}\int_{0}^{2a}x(2a-x)\,dx$$

$$=\frac{2}{3a^2}\left[-\frac{1}{6}\{0-(-a)\}^3\right]+\frac{1}{3a^2}\left\{\frac{1}{6}(2a-0)^3\right\}=-\frac{a}{9}+\frac{4a}{9}=\frac{{}^{セ}a}{{}^{ソ}3}$$

確率変数 Y は $Y=2X+7$ を満たすから

$$E(Y)=E(2X+7)=2E(X)+7=2\cdot\frac{a}{3}+7=\frac{{}^{タチ}2a}{{}^{ツ}3}+{}^{テ}7$$

$\boxed{参考}$　連続型確率変数 X と定数 a，b に対しても，$Y=aX+b$ とすると，Y も確率変数となり，Y の平均 (期待値) $E(Y)$，分散 $V(Y)$ について

$$E(Y)=aE(X)+b,\quad V(Y)=a^2V(X)$$

が成り立つ。