$\boxed{1}$

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$$

$\boxed{2}$

次の極限値を求めよ。ただし，a は定数とする。

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}$$

$\boxed{3}$

関数 $y=\log(2x-1)$ の第 n 次導関数を推測し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

$\boxed{4}$

曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ 上の点 $(1,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$

a は正の定数とする。パラメータ θ で表された曲線 C：$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ について，

$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ で表せ。また，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ における法線の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$

関数 $f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ となるように定数 a の値を定めよ。

$\boxed{7}$

関数 $f(x)=\dfrac{\log(1-x)}{x}$ は $0<x<1$ の範囲で減少することを示せ。

$\boxed{8}$

方程式 $x^3=k(x+1)^2$ が相異なる 3 つの実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{9}$

a を正の実数とする。$x>0$ において，曲線 $y=\log x$ と曲線 $y=\sqrt{ax}$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{10}$

すべての正の数 x，y に対して，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{11}$

a を正の定数，t を媒介変数として，$x(t)=e^{at}\cos t$，$y(t)=e^{at}\sin t$ で定まる曲線を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の速度ベクトルを $\vec{v}$ とすると $|\vec{v}|=$ ${}^{ア}\boxed{}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると $\cos\theta=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{1}$

$f(x)=e^{3x}$ とすると，$f'(x)=3e^{3x}$ であり

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{3}{2}$$

別解　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ を利用する。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

$\boxed{2}$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{x-a}{\sin(x-a)}$$

ここで，$f(x)=\sin x$ とすると，$f'(x)=\cos x$ であり

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\cos a$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sin(x-a)}=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\cos a\cdot 1=\cos a$

$\boxed{3}$

$y=\log(2x-1)$ から

$$y'=\frac{2}{2x-1}=2(2x-1)^{-1},$$
$$y''=(-1)\cdot 2^2(2x-1)^{-2},$$
$$y'''=(-1)^2\cdot 2^3\cdot 2(2x-1)^{-3},$$
$$y^{(4)}=(-1)^3\cdot 2^4\cdot 6(2x-1)^{-4}$$
$$\cdots\cdots$$

よって，$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot 2^n(n-1)!(2x-1)^{-n}$ …… ① と推測される。

これを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき　$y'=2(2x-1)^{-1}$ である。

一方　(① の右辺)$=(-1)^{1-1}\cdot 2^1(1-1)!(2x-1)^{-1}=2(2x-1)^{-1}$

よって，$n=1$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち $y^{(k)}=(-1)^{k-1}\cdot 2^k(k-1)!(2x-1)^{-k}$ が成り立つと仮定する。$n=k+1$ のときを考えると

$$y^{(k+1)}=\{y^{(k)}\}'=\{(-1)^{k-1}\cdot 2^k(k-1)!(2x-1)^{-k}\}'$$
$$=(-1)^{k-1}\cdot 2^k(k-1)!(-k)(2x-1)^{-k-1}\cdot 2$$
$$=(-1)^k\cdot 2^{k+1}k!(2x-1)^{-(k+1)}$$

よって，① は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について　$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot 2^n(n-1)!(2x-1)^{-n}$ となる。

$\boxed{4}$

$x>0$，$y>0$ のとき，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ の両辺を x について微分すると

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=0$$

すなわち　$\displaystyle y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

よって，点 $(1,\ 4)$ における接線の傾きは　$\displaystyle -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}=-2$

したがって，求める接線の方程式は　$y-4=-2(x-1)$

すなわち　$y=-2x+6$

$\boxed{5}$

$$\frac{dx}{d\theta}=a-a\cos\theta=a(1-\cos\theta),\qquad \frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$$

よって　$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=a\sin\theta\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

ゆえに　$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$
$$=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta-1}{a(1-\cos\theta)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}$$

また，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$x=a\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\right)$，$y=a\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

したがって，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ における法線の方程式は

$$y-a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-(2-\sqrt{3})\left\{x-a\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

すなわち　$y=-(2-\sqrt{3})x+\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}\pi a$

参考　一般に，$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ のとき

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{f'(\theta)g''(\theta)-f''(\theta)g'(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$ が成り立つ。

6

$f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

$f'(x)=\dfrac{a\{\cos x(\cos x+2)-\sin x(-\sin x)\}}{(\cos x+2)^2}=\dfrac{a(2\cos x+1)}{(\cos x+2)^2}$

[1]　$a=0$ のとき

常に $f(x)=0$ から，不適。

[2]　$a>0$ のとき

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／
$f(x)$		↗	極大	↘	

ゆえに，最大値は　$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{-\frac{1}{2}+2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

よって　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}$

したがって　$a=3$　　これは $a>0$ を満たす。

[3]　$a<0$ のとき

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	／
$f(x)$	0	↘	極小	↗	0

ゆえに，最大値は　$f(0)=f(\pi)=0$

よって，不適。

[1]～[3] から　$a=3$

7

$$f'(x)=\frac{-\frac{x}{1-x}-\log(1-x)}{x^2}=-\frac{\frac{x}{1-x}+\log(1-x)}{x^2}$$

$g(x)=\dfrac{x}{1-x}+\log(1-x)$ とおくと

$$g'(x)=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$0<x<1$ のとき　$g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調に増加する。

このことと，$g(0)=0$ から，$0<x<1$ のとき　$g(x)>0$

ゆえに　$f'(x)<0$

したがって，$f(x)$ は $0<x<1$ の範囲で減少する。

8

$x=-1$ は方程式を満たさない。

よって，$x\neq-1$ のとき，方程式は　$\dfrac{x^3}{(x+1)^2}=k$

求める実数解の個数は，$y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ のグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数に等しい。

$f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ $(x\neq-1)$とおくと

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)^2-x^3\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$$

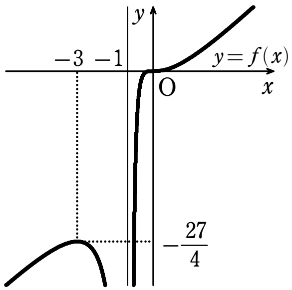
$f'(x)=0$ とすると　　$x=-3,\ 0$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-\frac{27}{4}$	↘	／	↗	0	↗

また　　$\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



直線 $y=k$ との共有点の個数を調べると，方程式

$x^3=k(x+1)^2$ が相異なる 3 つの実数解をもつような

k の値の範囲は　　$k<-\frac{27}{4}$

$\boxed{9}$

$f(x)=\sqrt{ax}-\log x$ とおく。

このとき，$x>0$ において曲線 $y=\log x$ と曲線 $y=\sqrt{ax}$ が共有点をもたないのは，

$x>0$ において $f(x)=0$ が解をもたないときである。

$$f'(x)=\sqrt{a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{ax}-2}{2x}$$

$x>0$ において $f'(x)=0$ とすると　　$\sqrt{ax}-2=0$

$a\fallingdotseq 0$ より　　$x=\frac{4}{a}$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	極小	↗

また　　$f\left(\frac{4}{a}\right)=2-\log\frac{4}{a}$，　　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$

よって，$f(x)$ は $x=\frac{4}{a}$ で最小値 $2-\log\frac{4}{a}$ をとるから，$f(x)=0$ が解をもたないための

条件は　　$2-\log\frac{4}{a}>0$

これを解いて　　$a>\frac{4}{e^2}$

$\boxed{10}$

関数 $f(u)=\log u$ は，$u>0$ で微分可能で　　$f'(u)=\frac{1}{u}$

[1]　$x>y>0$ のとき

区間 $[y,\ x]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{\log x-\log y}{x-y}=\frac{1}{c},\ 0<y<c<x$$

を満たす c が存在する。

$\frac{1}{x}<\frac{1}{c}<\frac{1}{y}$ であるから　　$\frac{\log x-\log y}{x-y}>\frac{1}{x}$

$x-y>0$，$x>0$ であるから $x(\log x-\log y)>x-y$ が成り立つ。

[2]　$y>x>0$ のとき

[1] と同様にして　$\frac{\log x-\log y}{x-y}<\frac{1}{x}$

$x-y<0$，$x>0$ であるから $x(\log x-\log y)>x-y$ が成り立つ。

[3]　$x=y>0$ のとき

$x(\log x-\log y)=x-y=0$ が成り立つ。

[1]～[3] から，すべての正の数 x，y に対して $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立つ。

等号が成り立つのは，$x=y$ のときに限る。

$\boxed{11}$

(ア)　$x'(t)=e^{at}(a\cos t-\sin t)$，$y'(t)=e^{at}(a\sin t+\cos t)$

よって　　$|\vec{v}|=\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}=\sqrt{e^{2at}(a\cos t-\sin t)^2+e^{2at}(a\sin t+\cos t)^2}$

$=\sqrt{a^2+1}\,e^{at}$

(イ)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(e^{at}\cos t,\ e^{at}\sin t)$ であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{e^{2at}\cos^2 t+e^{2at}\sin^2 t}=e^{at}$

$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=e^{at}(a\cos t-\sin t)e^{at}\cos t+e^{at}(a\sin t+\cos t)e^{at}\sin t=ae^{2at}$

よって　　$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\vec{v}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{ae^{2at}}{\sqrt{a^2+1}\,e^{at}\times e^{at}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$