第２章

～　極限　～

第１講　数列の極限

１　数列の極限

1　数列 $\{a_n\}$ の極限

収束	値 α に収束	$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$	……	極限は　α
発散(収束しない)	正の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$	……	極限は　∞
	負の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$	……	極限は　$-\infty$
	振動		……	極限は　ない

2　数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ とする。

1　$\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$　　ただし，k は定数

2　$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$，$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

3　$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

4　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta\fallingdotseq 0$

3　数列の極限と大小関係

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ とする。

5　すべての n について $a_n\leqq b_n$ ならば　$\alpha\leqq\beta$

6　すべての n について $a_n\leqq c_n\leqq b_n$ ならば　$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

注　$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ のとき，すべての n について $a_n\leqq b_n$ ならば　$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

注　性質 6 を「はさみうちの原理」ということがある。

4　数列の極限の計算

$\dfrac{\infty}{\infty}$　　分数式では分母の最高次の項で分母，分子を割る。

$\infty-\infty$　多項式ではくくり出し，無理式では有理化を考える。

極限が直接求めにくい場合は，不等式を利用する（上の 5，6 などを利用）

第１講　例題

$\boxed{1}$★☆☆

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} 3^n$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n}{3}\right)$　　(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2}-1\right)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n^2}\right)$　　(5) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$　　(6) $\lim_{n\to\infty}\cos n\pi$　　(7) $\lim_{n\to\infty}(-2)^n$

$\boxed{2}$★☆☆

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n^2+4n-2}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+7n-6}{-2n^2-3n+1}$　　(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}$

$\boxed{3}$★★☆

次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)}$$

$\boxed{4}$★★☆

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2+n}}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})$

$\boxed{5}$★★☆

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

$\boxed{6}$★★★

n は $n\geqq3$ の整数とする。

(1) 不等式 $2^n>\frac{1}{6}n^3$ が成り立つことを，二項定理を用いて示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$ の値を求めよ。

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} 2^n$　(2) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$　(3) $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$　(4) $\lim_{n\to\infty} (-3)^n$

(5) $\lim_{n\to\infty} (4-n^2)$　(6) $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2^n}$　(7) $\lim_{n\to\infty} (1-\sqrt{n})$　(8) $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}$

(9) $\lim_{n\to\infty} \{3+(-1)^n\}$　(10) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(-1)^n}$　(11) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

$\boxed{2}$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} (n^2-3n^3)$　(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{-2n+3}{4n-1}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n+1}$　(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-3n+1}{3+2n-n^2-4n^3}$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$\boxed{3}$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot5+2\cdot8+3\cdot11+\cdots\cdots+n(3n+2)}{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{3+7+11+\cdots\cdots+(4n-1)}{3+5+7+\cdots\cdots+(2n+1)}$

$\boxed{4}$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$　(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$　(4) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-n})$

(5) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)$

$\boxed{5}$

次の極限を求めよ。ただし，θ は定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}$

$\boxed{6}$

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $h>0$ のとき，不等式 $(1+h)^n \geqq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ が成り立つことを示せ。

(2) 数列 $\left\{\dfrac{n}{3^n}\right\}$ の極限を求めよ。

第１講　レベルＡ

$\boxed{1}$

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$\boxed{2}$［小樽商科大］

次の極限を求めよ。ただし，a，b は定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+an+b}-n-\frac{a}{2}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ \cdots\cdots\ +n\cdot(n+1)}{n^3}$

$\boxed{3}$［摂南大］

(1) 次の関係を満たす数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

（ア） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=1$　　（イ） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3}{2a_n+1}=2$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3}\right)=3$ が成り立つとき，定数 a の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{{a_n}^2+a_n+1}-\sqrt{{a_n}^2-a_n+1}\right)$ を求めよ。

$\boxed{4}$［国士舘大］

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\sin\frac{n\pi}{2}$ を求めよ。

$\boxed{5}$［山梨大］

実数 x に対して，$[x]$ を $m\leqq x<m+1$ を満たす整数 m とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}$

を求めよ。

$\boxed{1}$

斜辺 BC の長さが a の直角三角形 ABC がある。斜辺 BC を n 等分する点を M_1，M_2，……，M_{n-1} とし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{AM}_k{}^2=S_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n-1}$ を求めよ。

$\boxed{2}$［奈良教育大］

m，n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。ただし，m は定数とする。

(1)　1，2，3，……，mn の総和を $S(n)$ とする。$S(n)$ を m，n の式で表せ。

(2)　1，2，3，……，mn の中で m の倍数以外の総和を $T(n)$ とする。$T(n)$ を m，n の式で表せ。

(3)　(1)，(2) の $S(n)$，$T(n)$ について，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}$ を求めよ。

$\boxed{3}$［新潟大］

一般項が $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

$\boxed{4}$［大阪教育大］

n は自然数とし，$t>0$ とする。

(1)　不等式 $(1+t)^n \geqq 1+nt+\dfrac{n(n-1)}{2}t^2$ を示せ。

(2)　$0<r<1$ とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+t)^n}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n$ を求めよ。

(3)　$x\neq -1$ のとき，次の和 S_n を求めよ。

$$S_n=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}$$

(4)　$0<x<1$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

第２講　無限等比数列

２　無限等比数列

$\boxed{1}$　数列 $\{r^n\}$ の極限

$r>1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

$r=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=1$

$|r|<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

$\left.\begin{array}{l} r=1 \text{ のとき} \quad \lim_{n\to\infty} r^n=1 \\ |r|<1 \text{ のとき} \quad \lim_{n\to\infty} r^n=0 \end{array}\right\}$ 収束する

$r\leqq -1$ のとき　振動する　……　極限はない

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は　$-1<r\leqq 1$

第２講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4+2^{2n}}{3^n-2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^n-3^n)$

$\boxed{2}$ ★★☆

数列 $\{(x^2-2x)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

$\boxed{3}$ ★★☆

数列 $\left\{\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$ の極限について調べよ。

$\boxed{4}$ ★☆☆

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，$\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+1$

(2) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2+a_n}$

(3) $a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=\dfrac{5}{4}a_{n+1}-\dfrac{1}{4}a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\boxed{5}$ ★★☆

1 個のさいころを n 回続けて投げるとき，1 の目が奇数回出る確率を p_n とする。

(1) p_1，p_2，p_3 を求めよ。　　(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$ を示せ。

$\boxed{6}$ ★★★

$a_1>4$ として，漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+12}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ に対して，不等式 $a_n>4$ が成り立つことを示せ。

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，不等式 $a_{n+1}-4<\dfrac{1}{8}(a_n-4)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

第２講　例題演習

$\boxed{1}$

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-10^n}{3^{2n}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}+4^{n+1}}{3^n-4^n}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+5^n+7^n}$

$\boxed{2}$

次の数列が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

(1) $\{(1-2x)^n\}$　　(2) $\{(x^2-2x-1)^n\}$

$\boxed{3}$

次の数列の極限について調べよ。

(1) $\left\{\dfrac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}\right\}$　　(2) $\left\{\dfrac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}\right\}$

$\boxed{4}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，$\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1) $a_1=1$，$2a_{n+1}-3a_n-1=0$

(2) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$

(3) $a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=\dfrac{1}{4}(a_{n+1}+3a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\boxed{5}$

A の袋には赤球 1 個と黒球 3 個が，B の袋には黒球だけが 5 個入っている。それぞれの袋から同時に 1 個ずつ球を取り出して入れ替える操作を繰り返す。この操作を n 回繰り返した後に A の袋に赤球が入っている確率を a_n とする。

(1) a_n を求めよ。　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{6}$

数列 $\{a_n\}$ が $0<a_1<3$，$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき

(1) $0<a_n<3$ を証明せよ。　　(2) $3-a_{n+1}<\dfrac{1}{3}(3-a_n)$ を証明せよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$［公立はこだて未来大］

(1)　次の極限値を求めよ。

（ア）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^n\theta-\cos^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta}$　$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$　　（イ）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}$（$r$ は正の定数）

(2)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。$a_n=(4\sin^2\theta+2\cos\theta-3)^n$ とするとき，数列 $\{a_n\}$ が収束するような θ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$［公立はこだて未来大］

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$|\tan\theta|<1$ となる θ の値の範囲を求めよ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta$ を調べよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^n\theta-\cos^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta}$ を求めよ。ただし，$\theta\neq-\dfrac{\pi}{4}$ とする。

$\boxed{3}$［埼玉大］

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-4}{2a_n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対し，$a_n>2$ であることを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$［東京理科大］

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は次の関係式を満たすとする。

$$a_1=0,\ b_n=\frac{1}{5}a_n+1,\ a_{n+1}=3b_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　一般項 b_n を求めよ。　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n}-b_n}{b_{n+1}-b_n}$ を求めよ。

$\boxed{5}$［信州大］

$P_1(1,\ 1)$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{4}x_n+\dfrac{4}{5}y_n$，$y_{n+1}=\dfrac{3}{4}x_n+\dfrac{1}{5}y_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たす平面上の点列 $P_n(x_n,\ y_n)$ がある。点列 P_1，P_2，…… はある定点に限りなく近づくことを証明せよ。

6 ［琉球大］

$a_1=3$，$a_{n+1}=3-\dfrac{2}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1)　数学的帰納法により，不等式 $a_n>2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を証明せよ。

(2)　不等式 $0<a_{n+1}-2<\dfrac{1}{2}(a_n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を証明せよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

第２講　レベルB

$\boxed{1}$

1辺の長さが1である正三角形ABCの辺BC上に点A_1をとる。A_1から辺ABに垂線A_1C_1を引き，点C_1から辺ACに垂線C_1B_1を引き，更に点B_1から辺BCに垂線B_1A_2を引く。これを繰り返し，辺BC上に点A_1，A_2，……，A_n，……，辺AB上に点C_1，C_2，……，C_n，……，辺AC上に点B_1，B_2，……，B_n，……をとる。このとき，$BA_n=x_n$とする。

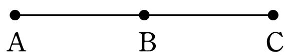
(1)　x_n，x_{n+1}が満たす漸化式を求めよ。　　　　(2)　極限値$\lim_{n\to\infty} x_n$を求めよ。

$\boxed{2}$ [東京都立大]

今後毎年，東京都の外に住む人の$\dfrac{1}{3}$が都内へ移住し，都内に住む人の$\dfrac{1}{3}$が都外へ移住すると仮定する。n年目の都外の人口をa_n，都内の人口をb_nとするとき，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$を求めよ。ただし，都内と都外の人口の総和は年によらず一定であるとする。

$\boxed{3}$ [滋賀医科大]

図のように3つの頂点A，B，Cが線分でつながっている。



この図形の上を点Pが次の規則に従って動く。以下，nは0以上の整数である。

● 時刻0に点Pは頂点Aにいる。

● 時刻nに点Pが頂点Aにいる場合，時刻$n+1$において，確率$\dfrac{1}{2}$で頂点Aにとどまっているか，確率$\dfrac{1}{2}$で頂点Bに移動している。

● 時刻nに点Pが頂点Bにいる場合，時刻$n+1$において，確率$\dfrac{1}{3}$で頂点Bにとどまっているか，確率$\dfrac{1}{3}$で頂点Aに移動しているか，確率$\dfrac{1}{3}$で頂点Cに移動している。

● 時刻nに点Pが頂点Cにいる場合，時刻$n+1$において，確率$\dfrac{1}{2}$で頂点Cにとどまっているか，確率$\dfrac{1}{2}$で頂点Bに移動している。

時刻nに点Pが頂点A，B，Cにいる確率をそれぞれa_n，b_n，c_nとする。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1}を，a_n，b_n，c_nを用いて表せ。

(2)　(1)の結果と$a_n+b_n+c_n=1$を利用して，b_nをnの式で表せ。

(3)　$p_n=2^n a_n$とおく。p_nをnの式で表せ。　　(4)　$\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$，$\lim_{n\to\infty} c_n$を求めよ。

4 ［島根大］

$a_1=2$ とし，$f(x)=x^2-3$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a_1,\ f(a_1))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_2 とする。以下同様に，$n=2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a_n,\ f(a_n))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_{n+1} とする。数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2)　$a_n>\sqrt{3}$ を示せ。

(3)　$a_n-\sqrt{3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{3})$ を示し，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

第３講　無限級数

３　無限級数

1　無限級数

無限級数の和　第 n 項までの部分和 S_n を求めて，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を計算する。

2　無限等比級数の収束，発散

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ について

$a \fallingdotseq 0$ のとき　$|r|<1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である。

$|r| \geqq 1$ ならば発散する。

$a=0$ のとき　収束し，その和は 0 である。

3　無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束して，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=T$ とする。

１　$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n=kS$　　ただし，k は定数

２　$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=S+T$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=S-T$

4　無限級数の収束・発散と項の極限

１　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

２　数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

注　２は１の対偶である。１，２の逆は成り立たない。

第３講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots\cdots$

$\boxed{2}$ ★☆☆

次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

(1) $(2-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)+\cdots\cdots$　　(2) $(3+\sqrt{2})-(2\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$

$\boxed{3}$ ★☆☆

次の無限級数の和を求めよ。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5^{n-1}}\right)$

$\boxed{4}$ ★★☆

循環小数 $0.4\dot{8}\dot{1}$ を分数に直せ。

$\boxed{5}$ ★★☆

次の無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

(1) $1+3x+9x^2+\cdots\cdots$　　(2) $x+x(3-x)+x(3-x)^2+\cdots\cdots$

$\boxed{6}$ ★★☆

次の無限級数は発散することを証明せよ。

(1) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}+\dfrac{7}{6}+\dfrac{9}{8}+\cdots\cdots$　　(2) $\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\cdots\cdots$

$\boxed{7}$ ★★★

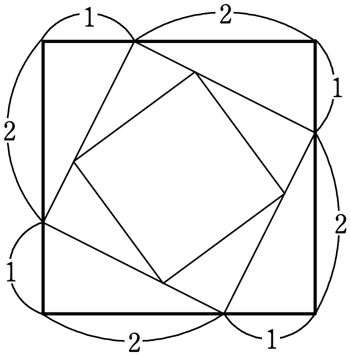
無限級数 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\cdots\cdots$　……① について

(1) 級数 ① の初項から第 n 項までの部分和を S_n とするとき，S_{2n-1}，S_{2n} をそれぞれ求めよ。

(2) 級数 ① の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めよ。

$\boxed{8}$★★☆

図のように，1 辺の長さ 1 の正方形の各辺を 2：1 に内分する 4 点を結んでできる正方形の面積を S_1 とする。同様に，新しくできた正方形の 4 辺を 2：1 に内分する 4 点を結んでできる正方形の面積を S_2 とする。以下同様に，この操作を無限に続けて得られるすべての正方形の面積の総和 $S=S_1+S_2+\cdots\cdots$ を求めよ。



$\boxed{9}$★★★

1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC の内接円を O_1 とし，円 O_1 に外接し，辺 AB，AC と接する円を O_2 とする。以下，このように辺 AB，AC に接する円を次々に作るとき，すべての円の面積の和を求めよ。

第３講　例題演習

$\boxed{1}$

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots\cdots$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}}$

$\boxed{2}$

次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

(1) $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\cdots\cdots$　　(2) $1-\dfrac{3}{5}+\dfrac{9}{25}-\cdots\cdots$

(3) $1-\sqrt{5}+5-\cdots\cdots$　　(4) $3+2\sqrt{3}+4+\cdots\cdots$

(5) $2\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})+(-12+8\sqrt{3})+\cdots\cdots$

$\boxed{3}$

次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^{n-1}}\right)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}$

$\boxed{4}$

次の循環小数を分数に直せ。

(1) $0.\dot{5}$　　(2) $0.5\dot{2}\dot{7}$　　(3) $0.5\dot{2}7\dot{3}$

$\boxed{5}$

次の無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

(1) $3+6x+12x^2+\cdots\cdots$　　(2) $(3-x)+x(3-x)+x^2(3-x)+\cdots\cdots$

(3) $x+x(x^2-x-1)+x(x^2-x-1)^2+x(x^2-x-1)^3+\cdots\cdots$

$\boxed{6}$

次の無限級数は発散することを示せ。

(1) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\cdots\cdots$　　(2) $\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{3}{2}\pi+\sin\dfrac{5}{2}\pi+\cdots\cdots$

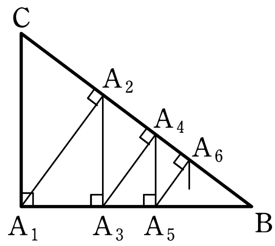
$\boxed{7}$

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{6}{7}+\dfrac{6}{7}-\dfrac{8}{9}+\cdots\cdots$　　(2) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}+\cdots\cdots$

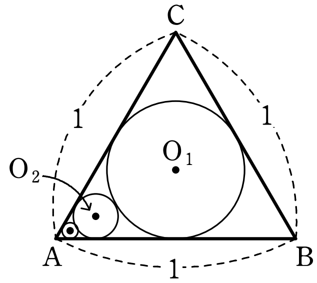
$\boxed{8}$

$\angle A_1=90°$，$A_1B=4$，$BC=5$，$CA_1=3$ の直角三角形 A_1BC がある。A_1 から対辺 BC に下ろした垂線を A_1A_2，A_2 から A_1B に下ろした垂線を A_2A_3 とし，以下これを無限に続け，点 A_2，A_3，……，A_n，…… をとるとき，$\triangle A_1BA_2$，$\triangle A_2BA_3$，$\triangle A_3BA_4$，……，$\triangle A_nBA_{n+1}$，…… の面積の総和 S を求めよ。



$\boxed{9}$

1 辺が 1 の正三角形 ABC の内接円を O_1 とし，O_1 に外接し，辺 AB，AC に接する円を O_2，O_2 に外接し，辺 AB，AC に接する円を O_3 とし，以下同様にして，円 O_1，O_2，O_3，……，O_n，…… を作るとき，円の面積の総和を求めよ。ただし，円 O_n の半径を r_n とするとき，$r_n>r_{n+1}$ とする。



第３講　レベルＡ

$\boxed{1}$

無限等比級数がある。その和は偶数番目の項だけ取り出してつくった級数の和よりも１だけ大きく，各項を２乗してつくった級数の和はもとの級数の和の半分である。もとの級数の和を求めよ。

$\boxed{2}$

無限等比級数で表された関数

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}+\cdots\cdots$$

について，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

$\boxed{3}$

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)+\cdots\cdots$

(2)　$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots\cdots$

(3)　$2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\cdots\cdots-\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}+\cdots\cdots$

$\boxed{4}$［鳥取大］

数列 $a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ について，次の問いに答えよ。

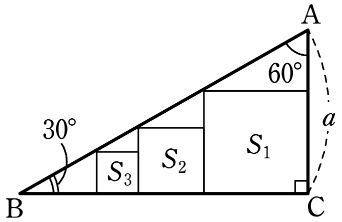
(1)　すべての自然数 n に対して $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n(n+1)}+\frac{B}{(n+1)(n+2)}$ を満たす定数 A，B を求めよ。

(2)　第 n 項までの和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。ただし，n は自然数とする。

(3)　無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ の和を求めよ。

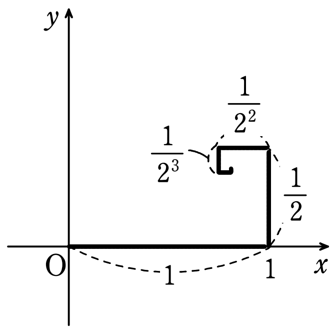
$\boxed{5}$

$A=60°$，$B=30°$，AC$=a$ である直角三角形 ABC 内に，右の図のように正方形 S_1，S_2，S_3，$\cdots\cdots$ が限りなく並んでいる。このとき，すべての正方形の面積の和を求めよ。



6

座標平面上で，点Ｐが原点Ｏを出発して x 軸の正の向きに１だけ進み，次に y 軸の正の向きに $\frac{1}{2}$ だけ進み，次に x 軸の負の向きに $\frac{1}{2^2}$ だけ進み，次に y 軸の負の向きに $\frac{1}{2^3}$ だけ進む。以下，同様な運動を限りなく続けるとき，点Ｐの極限の位置の座標を求めよ。



第３講　レベルＢ

1 [芝浦工業大]

次の無限級数の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log_{10}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log_{10}n\log_{10}(n+1)}$　　　(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$

2 [愛知工業大]

xy 平面において，原点を O，点 $(1,\ 0)$ を A_1，点 $(1,\ 1)$ を B_1 とする。

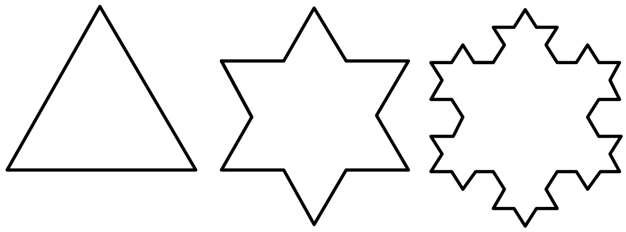
$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，線分 OA_n の中点を A_{n+1} とし，線分 OB_n を $2:1$ に内分する点を B_{n+1} とする。このとき，線分 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ の長さを求めよ。また，線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の長さを a_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ の和を求めよ。

3 [香川大]

面積１の正三角形 A_0 から始めて，図のように図形 A_1，A_2，$\cdots\cdots$ を作る。ここで A_n は，A_{n-1} の各辺の三等分点を頂点にもつ正三角形を A_{n-1} の外側につけ加えてできる図形である。

(1)　図形 A_n の辺の数を求めよ。

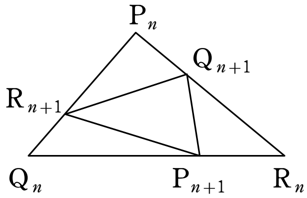
(2)　図形 A_n の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。



A_0　　　A_1　　　A_2

4 [大阪市立大]

$0<t<1$ とする。$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$ において，辺 $\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$ を $t:(1-t)$ に内分する点を P_2，辺 $\mathrm{R}_1\mathrm{P}_1$ を $t:(1-t)$ に内分する点を Q_2，辺 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ を $t:(1-t)$ に内分する点を R_2 とし，$\triangle\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2$ を作る。この操作を繰り返して，自然数 n に対して，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$ において，辺 $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$ を $t:(1-t)$ に内分する点を P_{n+1}，辺 $\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n$ を $t:(1-t)$ に内分する点を Q_{n+1}，辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ を $t:(1-t)$ に内分する点を R_{n+1} とし，$\triangle\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}$ を作る。$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$ の面積を a_n とするとき，次の問いに答えよ。



(1)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$ の面積を a_n と t を用いて表せ。また，a_{n+1} を a_n と t を用いて表せ。

(2)　$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ とおくとき，S を a_1 と t を用いて表せ。

(3)　$a_1=1$ とする。S を最小とする t の値とそのときの S の値を求めよ。

第４講　関数の極限

4　**関数の極限** (1)　　5　**関数の極限** (2)

1　関数の極限

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，

[1]　$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$　　または　　$x \longrightarrow a$ のとき $f(x) \longrightarrow \alpha$

[2]　$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$　　または　　$x \longrightarrow a$ のとき $f(x) \longrightarrow \infty$

[3]　$f(x)$ の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなるならば

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$　　または　　$x \longrightarrow a$ のとき $f(x) \longrightarrow -\infty$

[4]　[1]～[3] のいずれでもない場合，$x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ の極限はない。

注　$x \longrightarrow \infty$，$x \longrightarrow -\infty$ のときの極限も同様に考える。

2　関数の極限の性質

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\beta$ とする。

1　$\lim\limits_{x\to a} kf(x)=k\alpha$　　ただし，k は定数

2　$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$，$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

3　$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

4　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　　ただし $\beta \neq 0$

注　１～４は $x \longrightarrow \infty$，$x \longrightarrow -\infty$ の場合にも成り立つ。

3　片側からの極限

1　**右側極限**　$x>a$ の範囲で $x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ の極限　$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$

　左側極限　$x<a$ の範囲で $x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ の極限　$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$

2　$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\alpha \iff \lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ と $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ がともに存在しても，それらが一致しないとき，

$x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ の極限はない。

4　関数の極限の計算

$\dfrac{\infty}{\infty}$　　分数式では分母の最高次の項で分母，分子を割る。

$\infty-\infty$　多項式ではくくり出し，無理式では有理化を考える。

$\dfrac{0}{0}$　　分数式では約分，無理式では有理化を考える。

$\infty\times 0$　$\dfrac{\infty}{\infty}$ または $\dfrac{0}{0}$ と同様に考える。

5　関数の極限と大小関係

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする。

1　$x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

2　$x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば　$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$

注　性質 1，2 は「$x = a$ の近くで」を「十分大きい x で」と読みかえると，$x \longrightarrow \infty$ のときにも成り立つ。同様に，$x \longrightarrow -\infty$ のときにも成り立つ。

注　性質 2 を「はさみうちの原理」ということがある。

注　$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ のとき，十分大きい x で常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば　$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

6　自然対数

1　自然対数

自然対数の底 e の定義　$e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = 2.71828\cdots\cdots$

注　微分法や積分法では，e を底とする対数，すなわち自然対数のときに，底 e を省略して，単に $\log x$ と書くことが多い。

第４講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$\boxed{2}$ ★★☆

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+a}-b}{x-3}=\frac{3}{8}$$

$\boxed{3}$ ★★☆

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-ax-b\right)=5$$

$\boxed{4}$ ★☆☆

次の極限を調べよ。極限が存在する場合にはその極限をいえ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|}{x-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$

$\boxed{5}$ ★★☆

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+3x}{x-2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$

$\boxed{6}$ ★★☆

次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$

$\boxed{7}$ ★★☆

$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ を用いて，次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

第４講　例題演習

$\boxed{1}$

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2-2}{2x^2+x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{4}{x}-2\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x}}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$\boxed{2}$

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+12}{x^2-5x+6}=b$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+5}-b}{x-1}=4$

$\boxed{3}$

等式 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-ax-b)=1$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{4}$

次の関数について $x\longrightarrow1-0$，$x\longrightarrow1+0$，$x\longrightarrow1$ のときの極限をそれぞれ調べよ。

(1) $\displaystyle\frac{x^2}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\frac{x}{(x-1)^2}$　　(3) $\displaystyle\frac{|x-1|}{x^3-1}$

$\boxed{5}$

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x|}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})$

$\boxed{6}$

次の極限値を求めよ。ただし，[　] はガウス記号を表す。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+[x]}{x+1}$

$\boxed{7}$

$\displaystyle\lim_{k\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ であることを用いて，次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{4}{x}}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\{\log(x+5)-\log x\}$

第４講　レベルＡ

$\boxed{1}$

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-5^x}{3^x+5^x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(x-\sqrt{x^2-4})$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

$\boxed{2}$［摂南大］

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}$ を求めよ。

(2) 等式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-(ax+1)}{x}=3$ が成り立つような定数 a の値を求めよ。

(3) 等式 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^xa-2^{-x}}{2^{x+1}-2^{-x-1}}=\frac{3}{4}$ が成り立つとき，定数 a の値は $a=$ ア $\boxed{}$ である。

また，このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_a(2x)-\log_a(3x+2)\}$ の値は イ $\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$

次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{\log_{0.5}x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}([2x]-[x])$

$\boxed{4}$

次の２つの条件を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

[1] $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=2$　　[2] $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{x^2+4x+3}=-1$

$\boxed{5}$［東京理科大］

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\cos^2x+(3b+2)\sin x-2a+b+1}{\sin^3x+a\cos^2x-a}=c$ となるように実数の定数 a，b，c の値を定めよ。

$\boxed{6}$

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$ を求めよ。$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(2) $x>1$ のとき，不等式 $0<\log x<x$ が成り立つ。これを利用して，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$ を求めよ。

第４講　レベルＢ

$\boxed{1}$ [明治大]

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[\sqrt{x+x^2}]-\sqrt{x}}{x}$ を求めよ。$[x]$ は x より大きくない最大の整数を表す。

$\boxed{2}$ [関西大]

n を 2 以上の自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=$ ${}^{ア}\boxed{}$ であり，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-1)^2\log\left\{1+\frac{3}{4n(n-1)}\right\}=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$ [早稲田大]

関数 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ について，$\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f(x)-g(x)}{(x-p)^2}$ $[p>0]$ が有限な値になるように a，b の値を定め，その極限値を求めよ。

$\boxed{4}$ [東北大]

$f(x)=x^2+2kx$ $(k>1)$ とおく。曲線 $y=f(x)$ と円 $C：x^2+y^2=1$ の 2 つの交点のうち，第 1 象限の点を P，第 3 象限の点を Q とする。点 O $(0,\ 0)$，A $(1,\ 0)$，B $(-1,\ 0)$ に対し，$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$，$\beta=\angle\mathrm{BOQ}$ とおく。

(1)　k を α で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形のうち，$y=f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。