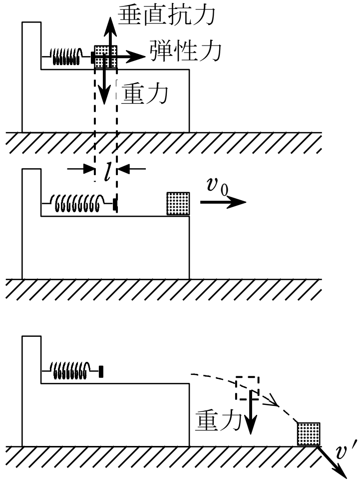
1 [2005 センター]

解答　(1)　⑥　　(2)　②　　(3)　④

(1)　小物体を離した後の運動において，小物体にはたらく力の中で仕事をするものは弾性力だけである。また，ばねから離れた後は等速直線運動をする。したがって，力学的エネルギー保存の法則より，



$$\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}kl^2$$

よって

$$v_0=l\sqrt{\frac{k}{m}}$$

以上より，正しいものは　⑥。

(2)　台を飛び出した後は水平投射運動で，重力によって落下していく。したがって，衝突直前の速さを v' とすると力学的エネルギー保存の法則より，

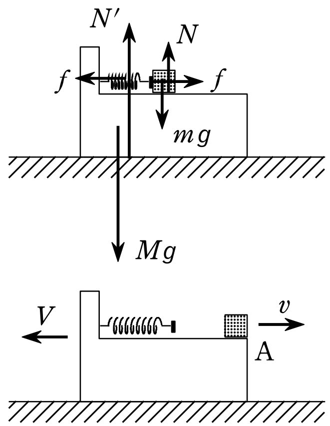
$$\frac{1}{2}mv'^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2+mgh$$

よって，

$$v'=\sqrt{v_0{}^2+2gh}$$

以上より，正しいものは　②。

(3)　小物体を離した後に，台にはたらく重力 Mg と垂直抗力 N'，小物体にはたらく重力 mg と垂直抗力 N はつりあいからそれぞれ打ち消し合う。また，小物体がばねに押される力と台に固定されたばねが押し返される力は，作用反作用の法則から大きさ f が等しく逆向きである。したがって，台と小物体の物体系にはたらく外力は0となり，A から小物体が飛び出すまで運動量が保存するので，A から飛び出すときの小物体の速度を v，台の速度を V とすると



$$MV+mv=0$$

よって，

$$V=-\frac{m}{M}v$$

となる。

以上より，正しいものは　④。

2 [2013 センター]

解答　(1)　②　　(2)　⑤　　(3)　①　　(4)　④

(1)　A，B が一体となって運動するので，A と B の面には静止摩擦力 f が図 a のようにそれぞれにはたらいている。AB を一体として考えると，これらの力は内力となり，水平方向の外力は A と床の間にはたらく動摩擦力 f_1 と B を引く力 F となる。したがって，加速度の大きさを a とすると，水平右向きを正とした運動方程式は

$$(m+M)a=F-f_1$$

となり

$$a=\frac{F-f_1}{m+M}$$

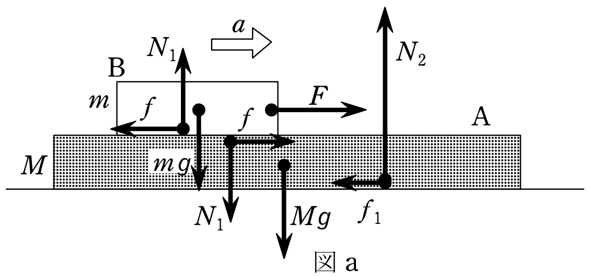


図 a

以上より，正しいものは ②。

(2)　A から B にはたらく垂直抗力の大きさを N_1，A が床から受ける垂直抗力の大きさ

を N_2 とする。B の鉛直方向の力のつりあいから

$$N_1-mg=0$$

A の鉛直方向の力のつりあいから

$$N_2-N_1-Mg=0$$

よって

$$N_2=N_1+Mg=(m+M)g$$

したがって，B と床の間の動摩擦力の大きさは

$$f_1=\mu' N_2=\mu'(m+M)g$$

以上より，正しいものは ⑤。

(3)　水平方向にはたらく力は図 b のようになる。B には右向きに大きさ F の力と左向きに大きさ f_2 の動摩擦力，A には右向きに大きさ f_2 の動摩擦力と左向きに大きさ f_1 の動摩擦力がはたらく。A は等速直線運動をするので，A にはたらく水平方向の合力は 0 である。よって，$f_1=f_2$ である。

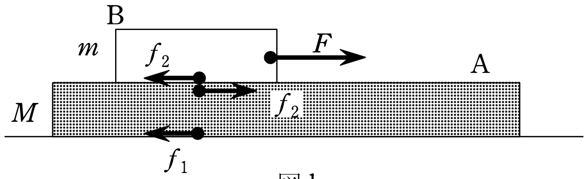


図 b

以上より，正しいものは ①。

(4)　A と B の間の動摩擦係数を μ'' とすると

$$f_2=\mu'' N_1=\mu'' mg$$

(3) から $f_1=f_2$ なので，(2) の結果もあわせて

$$\mu'' mg=f_1=\mu'(m+M)g \quad ゆえに \quad \mu''=\left(1+\frac{M}{m}\right)\mu'$$

以上より，正しいものは ④。

3 ［1998 センター］

解答　［A］(1)　④　　(2)　④　　［B］(3)　③　　(4)　①　　(5)　④

［A］(1)　力学的エネルギー保存より，衝突直前の物体Ⅱの速さ v_{II} は

$$mg(h_{\text{A}}-h_{\text{B}})=\frac{1}{2}mv_{\text{II}}{}^2 \qquad ゆえに \quad v_{\text{II}}=\sqrt{2g(h_{\text{A}}-h_{\text{B}})}$$

同じ質量の物体の弾性衝突だから，衝突により速度が交換する。

ゆえに　$v=v_{\text{II}}=\sqrt{2g(h_{\text{A}}-h_{\text{B}})}$

別解　$\begin{cases} mv_{\text{II}}=mv_{\text{II}}'+mv \\ 1=-\dfrac{v_{\text{II}}'-v}{v_{\text{II}}-0} \end{cases}$　　ゆえに　$v=v_{\text{II}}$

(2)　Ⅰが落下するまでの時間を t とすると

$$h_{\text{B}}=\frac{1}{2}gt^2 \qquad ゆえに \quad t=\sqrt{\frac{2h_{\text{B}}}{g}} \qquad したがって \quad l_1=vt=v\sqrt{\frac{2h_{\text{B}}}{g}}$$

［B］(3)　衝突前後では，運動量の和は保存するが，力学的エネルギーは弾性衝突以外では保存しない。

(4)　衝突後のⅡ，Ⅲの速度を v_2，v_3 とする。運動量保存の関係から

$mv_{\text{II}}=mv_2+mv_3$　　ゆえに　$v=v_2+v_3$

したがって　$vt=v_2t+v_3t$　　ゆえに　$l_1=l_2+l_3$

(5)　$e=-\dfrac{v_2-v_3}{v-0}=\dfrac{v_3-v_2}{v}=\dfrac{v_3-v_2}{v_3+v_2}=\dfrac{v_3t-v_2t}{v_3t+v_2t}=\dfrac{l_3-l_2}{l_3+l_2}$

4

解答　(1)　(ア)　$\dfrac{1}{2}kl^2$　　(2)　(イ)　$\dfrac{1}{2}kl^2$

(3)　(ウ)　$l\sqrt{\dfrac{kM}{m(M+m)}}$　　(エ)　$l\sqrt{\dfrac{km}{M(M+m)}}$

(4)　(オ)　$\dfrac{m}{M+m}v$　　(カ)　縮んで　　(キ)　$\dfrac{mM}{2(M+m)}v^2$

(5)　(ク)　1　　(6)　(ケ)　左　　(コ)　$\dfrac{M-m}{M+m}v$

ヒント　(ア)　(ばねを縮めるのに要した仕事)=(ばねにたくわえられた弾性エネルギー)

(ウ)，(エ)　運動量保存則と力学的エネルギー保存則の式を連立させる。

(カ)　『A と B の速度が等しくなるとき』⟹ B に対する A の相対速度が 0 になるとき ⟹ A と B が最も近づくとき

(ク)　衝突時に力学的エネルギーが失われないので，弾性衝突である。

(ケ)，(コ)　運動量保存則と反発係数の式を連立させる。

(1)(ア)　ばねを縮めるのに要した仕事は，ばねにたくわえられた弾性エネルギーに等

しく $\dfrac{1}{2}kl^2$

(2)(イ) 力学的エネルギー保存則により，A と B の運動エネルギーの和は，はじめばねにたくわえられた弾性エネルギー $\dfrac{1}{2}kl^2$ に等しい。

(3)(ウ),(エ) ばねから離れたあとの A，B の速さをそれぞれ v_A，v_B とし，水平方向右向きの速度を正とする。A の速度は $-v_A$ であるから※A←

運動量保存則より $0=m(-v_A)+Mv_B$ ……①

力学的エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}kl^2=\dfrac{1}{2}mv_A{}^2+\dfrac{1}{2}Mv_B{}^2$ ……②

①，② 式から $v_A=l\sqrt{\dfrac{kM}{m(M+m)}}$，$v_B=l\sqrt{\dfrac{km}{M(M+m)}}$ ※B←

(4)(オ) 右向きの速度を正とする。共通の速度を V とすると，運動量保存則により

$mv=(M+m)V$ よって $V=\dfrac{m}{M+m}v$

(カ) A と B の相対速度が 0 となるときであるから，A と B が最も近づくときである。ゆえにばねは最も縮んでいる。

(キ) ばねがたくわえている弾性エネルギーを U_k とすると，力学的エネルギー保存則により $\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}(M+m)V^2+U_k$

(オ) の $V=\dfrac{m}{M+m}v$ を代入して

$$U_k=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}(M+m)\frac{m^2v^2}{(M+m)^2}=\frac{1}{2}mv^2\left(1-\frac{m}{M+m}\right)=\frac{mM}{2(M+m)}v^2$$

(5)(ク) 力学的エネルギーが保存されるから，弾性衝突である。

$e=1$ ※C←

(6)(ケ) 離れるときの A，B の速度をそれぞれ v_A'，v_B' とする。運動量保存則および反発係数 ($e=1$) の式は

$mv=mv_A'+Mv_B'$ ……③

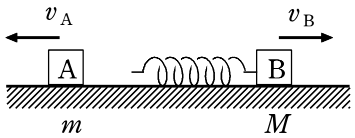
$1=-\dfrac{v_A'-v_B'}{v-0}$ ……④

③，④ 式から $v_A'=-\dfrac{M-m}{M+m}v$

$M>m$ であるから $v_A'<0$ よって，A の速度 v_A' の向きは図の左向き。

(コ) 速度 v_A' の大きさ (速さ) は $|v_A'|=\dfrac{M-m}{M+m}v$

←※A



←※B 別解 静止物体の分裂では，運動エネルギーの比は質量の逆比になるから

$\dfrac{1}{2}mv_A{}^2=\dfrac{1}{2}kl^2\cdot\dfrac{M}{M+m}$ よって $v_A=l\sqrt{\dfrac{kM}{m(M+m)}}$

$\dfrac{1}{2}Mv_B{}^2=\dfrac{1}{2}kl^2\cdot\dfrac{m}{M+m}$ よって $v_B=l\sqrt{\dfrac{km}{M(M+m)}}$

←※C 衝突後の A，B の速度を v_A'，v_B' とする。運動量保存とエネルギー保存を用いれば

$$\begin{cases} mv=mv_A'+Mv_B' \\ \dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}mv_A'^2+\dfrac{1}{2}Mv_B'^2 \end{cases}$$

整理して

$$\begin{cases} m(v-v_A')=Mv_B' \\ m(v-v_A')(v+v_A')=Mv_B'^2 \end{cases}$$

まとめると $v+v_A'=v_B'$

よって $e=-\dfrac{v_A'-v_B'}{v-0}=-\dfrac{v_A'-v_B'}{v_B'-v_A'}=1$

5 [2017 法政大]

解答 (1) $\dfrac{\pi}{6}$rad (2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍 (3) $\dfrac{2v}{3g}$ (4) $\dfrac{4v^2}{9g}$ (5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}v$

(6) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}v-\dfrac{\sqrt{2}}{2}V_0$ (7) $\dfrac{4}{15}v$

ヒント　(1)　なめらかな斜面の斜衝突において

$$\begin{cases}\text{面に平行な方向の速度成分は } v_{/\!/}'=v_{/\!/}\ \text{(変化しない)}\\ \text{面に垂直な方向の速度成分は } v_{\perp}'=-ev_{\perp}\ \text{(速さが } e \text{ 倍)}\end{cases}$$

(3), (4)　斜面方向に x 軸，斜面に垂直な方向に y 軸をとって考えると，それぞれの方向に等加速度運動をする。

(5)　斜面に平行な方向の速度成分は変化しない。

(6)　斜面に垂直な方向は，小球と三角台の速度成分を使って，反発係数の式「$e=-\dfrac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$」を用いる。

(1)　衝突直後の小球の速さを v' とする (図 a)。

斜面に平行な速度成分は変化しないので

$v'\cos\theta=v\sin\theta$　…… ①

斜面に垂直な速度成分は，速さ (大きさ) が $e=\dfrac{1}{3}$ 倍になるので

$v'\sin\theta=\dfrac{1}{3}v\cos\theta$　…… ②

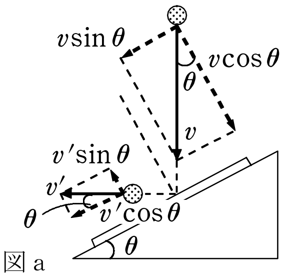


図 a

①，② 式より v'，v を消去する (②÷①) と　$\tan\theta=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\tan\theta}$

よって　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　ゆえに　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$**rad**

(2)　① 式より　$v'=v\tan\theta=v\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}v$　　よって　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍

(3)　点 P を原点として，斜面方向下向きに x 軸，斜面方向垂直上向きに y 軸をとる (図 b)。重力加速度の x，y 成分をそれぞれ a_x，a_y とすると

$a_x=g\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}g$，$a_y=-g\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}g$

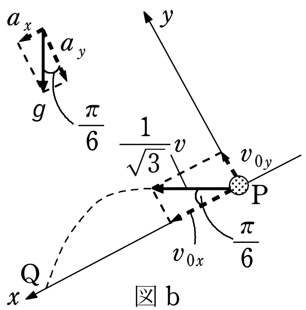


図 b

また，小球 M は斜面に対して角度 $\dfrac{\pi}{6}$rad の方向に，初速度 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}v$ の斜方投射であるので，初速度の x，y 成分をそれぞれ v_{0x}，v_{0y} とすると

$$v_{0x}=\frac{1}{\sqrt{3}}v\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}v,\quad v_{0y}=\frac{1}{\sqrt{3}}v\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2\sqrt{3}}v$$

M が点 P に衝突した時刻を $t=0$ とすると，時刻 t における y 座標は，等加速度運動の式「$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$」より　$y=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}vt+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}g\right)t^2$

斜面と再び衝突する点 Q において，M の y 座標は 0 ($y=0$) となるので

$$y=0=\frac{1}{2\sqrt{3}}vt-\frac{\sqrt{3}}{4}gt^2=\frac{t}{2\sqrt{3}}\left(v-\frac{3}{2}gt\right)$$

$t>0$ より　$\boldsymbol{t=\dfrac{2v}{3g}}$ ※A←※B←　…… ③

(4)　時刻 t における M の x 座標は，等加速度運動の式より

$$x=\frac{1}{2}vt+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}g\right)t^2=\frac{1}{2}vt+\frac{1}{4}gt^2$$

③ 式を代入すると

$$x=\frac{1}{2}v\times\left(\frac{2v}{3g}\right)+\frac{1}{4}g\times\left(\frac{2v}{3g}\right)^2=\frac{v^2}{3g}+\frac{v^2}{9g}=\boldsymbol{\frac{4v^2}{9g}}$$ ※B←

(5)　衝突直後の小球の斜面方向の速度成分を $v_{/\!/}$，斜面と垂直方向の速度成分を $v_{\perp}$ とする (図 c)。斜面と小球の間に摩擦はなく，小球 M の斜面に平行な速度成分は変化しないので

$v_{/\!/}=v\sin\dfrac{\pi}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}v}$　…… ④

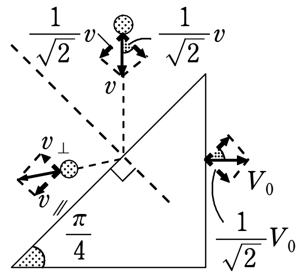


図 c

(6)　斜面と垂直方向については，小球 M と (板＋三角台) が $e=\dfrac{1}{3}$ の衝突をしているので，反発係数の式「$e=-\dfrac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$」より

$$\frac{1}{3}=-\frac{v_{\perp}-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}V_0\right)}{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}v-0}\qquad\text{よって}\quad\frac{1}{3\sqrt{2}}v=v_{\perp}+\frac{1}{\sqrt{2}}V_0$$

ゆえに　$v_{\perp}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}v-\dfrac{\sqrt{2}}{2}V_0$　……⑤

(7)　小球 M と (板＋三角台) の物体系について，水平方向には外力がはたらかず，小球と板の間の内力 (作用・反作用の力) のみが作用するので，水平方向の運動量が保存される (図 d)。右向きを正として，水平方向の運動量保存則の式を立てると

$$0+0=2mV_0+m(-v_1)$$

(衝突直後の小球の速度 v' の水平成分を v_1 とした)

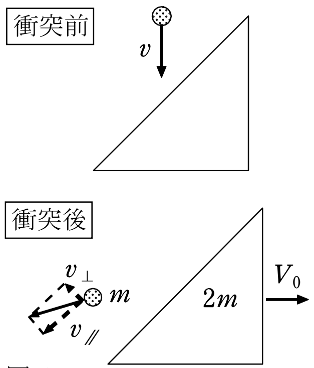


図 d

図 e より　$v_1=v_{/\!/}\cos\dfrac{\pi}{4}+v_{\perp}\cos\dfrac{\pi}{4}$　であるから

$$0=2mV_0+m\left\{-\left(v_{/\!/}\cos\frac{\pi}{4}+v_{\perp}\cos\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=2mV_0-\frac{1}{\sqrt{2}}mv_{/\!/}-\frac{1}{\sqrt{2}}mv_{\perp}$$

④，⑤ 式を用いると

$$0=2mV_0-\frac{1}{\sqrt{2}}m\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}v-\frac{1}{\sqrt{2}}m\left(\frac{\sqrt{2}}{6}v-\frac{\sqrt{2}}{2}V_0\right)$$

$$=2mV_0-\frac{1}{2}mv-\frac{1}{6}mv+\frac{1}{2}mV_0=\frac{5}{2}mV_0-\frac{2}{3}mv$$

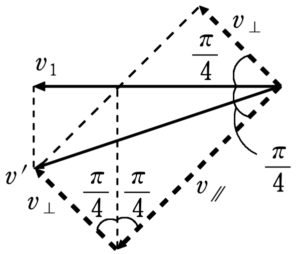


図 e

よって　$\dfrac{5}{2}mV_0=\dfrac{2}{3}mv$　　ゆえに　$V_0=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}}\boldsymbol{v}$

←※A　時刻 t における y 方向の速度 v_y は

$$v_y=\frac{1}{2\sqrt{3}}v-\frac{\sqrt{3}}{2}gt$$

と表される。運動の対称性より，M が斜面から最も離れる ($v_y=0$ になる) 時間は，斜面に衝突するまでの時間 t の半分であるので

$$v_y=0=\frac{1}{2\sqrt{3}}v-\frac{\sqrt{3}}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)$$

よって

$$t=2\times\frac{v}{2\sqrt{3}}\times\frac{2}{\sqrt{3}\,g}=\frac{2v}{3g}$$

←※B　M は衝突後に水平投射をしている。水平左向きに x 軸，鉛直下向きに y 軸をとると

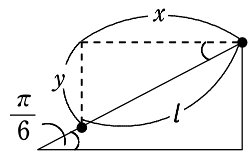
$$x=v't=\frac{1}{\sqrt{3}}vt$$

$$y=\frac{1}{2}gt^2$$

M が傾き $\dfrac{\pi}{6}$ の斜面に落下するということは，M の座標 $(x,\ y)$ が

$$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{y}{x}$$

の関係になればよい。



$$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}vt}$$

よって　$t=\dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{v}}{\mathbf{3}\boldsymbol{g}}$

このときの x 座標は

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}v\times\frac{2v}{3g}=\frac{2v^2}{3\sqrt{3}\,g}$$

求める距離 l と x の関係は

$$l=\frac{x}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{2v^2}{3\sqrt{3}\,g}=\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{v}^2}{\mathbf{9}\boldsymbol{g}}$$