

1

α は絶対値 1 の複素数で $\alpha \neq 1$ とし, $1, \alpha, \alpha^2$ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。点 C が線分 AB の垂直二等分線 ℓ 上の点であるとする。

(1) α の偏角 $\arg \alpha$ は $\arg \alpha = \pm$ ° である。ただし, $\arg \alpha$ は $-180^\circ < \arg \alpha \leq 180^\circ$ の範囲で考える。

(2) $\arg \alpha =$ ° とする。0 でない複素数 z_0 を表す点を P とし, 直線 ℓ に関して P と対称な点を Q, 線分 AC の垂直二等分線 m に関して Q と対称な点を R とし, 点 Q, R が表す複素数をそれぞれ z_1, z_2 とする。このとき

$$z_0 z_1 = |z_0|^2 \frac{\text{エオ} + \sqrt{\text{カ}} i}{\text{キ}}, \quad z_1 z_2 = |z_1|^2 \frac{\text{エオ} - \sqrt{\text{カ}} i}{\text{キ}}$$

であり, z_2 を z_0 で表すと, R は P を原点のまわりに ° だけ回転した点であることがわかる。

(3) $z_0 = 1 - i$ のとき, R が表す複素数 z_2 は

$$z_2 = \frac{\text{サシ} + \sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}} + \frac{\text{ソ} + \sqrt{\text{タ}}}{\text{チ}} i \text{ であり, 線分 PR の長さは}$$

$$\sqrt{\text{ツ}} \text{ である。また } \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} = \frac{\text{テ} + \sqrt{\text{ト}}}{\text{ナ}} (\text{ニ} + i) \text{ である。}$$

2

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い、2 連勝したチームが出た時点で、そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

- (a) 1 試合目で A と B が対戦する。
- (b) 2 試合目で、1 試合目の勝者と、1 試合目で待機していた C が対戦する。
- (c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は、 k 試合目の勝者と、 k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお、すべての対戦において、それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で、引き分けはないものとする。

- (1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
- (2) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
- (3) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

3

曲線 $C: y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - 2x$ を考える。

- (1) C と直線 $L: y = -x + t$ が異なる 4 点で交わるような t の値の範囲を求めよ。
- (2) C と L が異なる 4 点で交わるとし、その交点を x 座標が小さいものから順に $P_1,$

P_2, P_3, P_4 とするとき、 $\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}| + |\overrightarrow{P_3P_4}|}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = 4$ となるような t の値を求めよ。

- (3) t が (2) の値をとるとき、 C と線分 P_2P_3 で囲まれる図形の面積を求めよ。

4

n を 4 以上の自然数とする。数 2, 12, 1331 がすべて n 進法で表記されているとして、 $2^{12} = 1331$ が成り立っている。このとき n はいくつか。10 進法で答えよ。