【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材②

高１甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｕ「数Ⅲ微分」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の関数を，導関数の定義に従って微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x-2}$　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\boxed{2}$

次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x+1)(x^2-x+1)$　　(2) $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

$\boxed{3}$

次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x^2-1)^3$　　(2) $y=\dfrac{1}{(2x+3)^2}$

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$　　(4) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$\boxed{4}$

(1) $y=x^3$ の逆関数の導関数を求めよ。

(2) $y=x^3+3x$ の逆関数を $g(x)$ とするとき，微分係数 $g'(0)$ を求めよ。

$\boxed{5}$

$f'(a)$ が存在するとき，次の極限を $f'(a)$ で表せ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$$

$\boxed{6}$

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin x-\tan x$　　(2) $y=3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(3) $y=\sin^3 x$　　(4) $y=\sin x\cos x$

$\boxed{7}$

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log|x^2-5|$　　(2) $y=\log_2\sqrt{x+1}$　　(3) $y=x\log x$

(4) $y=(x+3)e^{2x}$　　(5) $y=2^{-x^2}$

$\boxed{8}$

関数 $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$ を微分せよ。

$\boxed{9}$

(1) 方程式 $x^2+4y^2=16$ で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。
ただし，y を用いて表してもよい。

(2) x の関数 y が，t を媒介変数として，$x=2\cos^3 t$，$y=3\sin^3 t$ で表されるとき，
$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

$\boxed{10}$

x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=\dfrac{t}{1+t}$，$y=\dfrac{t^2}{1+t}$　　(2) $x=2\cos t$，$y=3\sin t$

$\boxed{11}$

方程式 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ ……① で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ

x と y を用いて表せ。

$\boxed{12}$

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$　　(2) $y=\log\left|\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x+\sqrt{1+x^2}+1}\right|$

$\boxed{13}$

$\displaystyle\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ を用いて，次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$

【解答&解説】

1

解答 (1) $y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$ (2) $y'=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

2

解答 (1) $y'=9x^2-4x+2$ (2) $y'=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

3

解答 (1) $y'=6x(x^2-1)^2$ (2) $y'=-\dfrac{4}{(2x+3)^3}$ (3) $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(4) $y'=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$

4

解答 (1) $\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

5

解答 $5f'(a)$

6

解答 (1) $y'=\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ (2) $y'=-6\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(3) $y'=3\sin^2 x\cos x$ (4) $y'=\cos 2x$

7

解答 (1) $y'=\dfrac{2x}{x^2-5}$ (2) $y'=\dfrac{1}{2(x+1)\log 2}$ (3) $y'=\log x+1$

(4) $y'=(2x+7)e^{2x}$ (5) $y'=-2^{1-x^2}x\log 2$

8

解答 $y'=\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$

9

解答 (1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{4y}$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{2}\tan t$

10

解答 (1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2(t+1)^3$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{3}{4\sin^3 t}$

11

解答 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9x}{4y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{81}{4y^3}$

12

解答 (1) $y'=\dfrac{1}{\cos x}$ (2) $y'=\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$

13

解答 (1) e^{-1} (2) e^{-2} (3) e^{-1}

1

解説

(1) $$y'=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{1}{x+h-2}-\dfrac{1}{x-2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x-2)-(x+h-2)}{h(x+h-2)(x-2)}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-h}{h(x+h-2)(x-2)}=\lim_{h\to0}\frac{-1}{(x+h-2)(x-2)}=-\frac{1}{(x-2)^2}$$

(2) $$y'=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x+h})^2}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\lim_{h\to0}\frac{-h}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$\boxed{2}$

(解説)

(1) $y'=(3x+1)'(x^2-x+1)+(3x+1)(x^2-x+1)'$

$=3(x^2-x+1)+(3x+1)(2x-1)$

$=9x^2-4x+2$

(2) $y'=\dfrac{(x^2+1)'(x+1)-(x^2+1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{2x(x+1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

別解　$y=x-1+\dfrac{2}{x+1}$ であるから

$$y'=(x-1)'-\frac{2(x+1)'}{(x+1)^2}=1-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $y'=3(x^2-1)^2(x^2-1)'=3(x^2-1)^2\cdot 2x=6x(x^2-1)^2$

(2) $y=(2x+3)^{-2}$ であるから

$$y'=-2(2x+3)^{-3}(2x+3)'=-\frac{4}{(2x+3)^3}$$

(3) $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$y'=\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}(1-x^2)'=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(4) $y=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+x-1}{x+1-(x-1)}=x-\sqrt{x^2-1}=x-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$

よって　$y'=1-\dfrac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-1}(x^2-1)'=1-\dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$

$$=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$\boxed{4}$

(解説)

(1) $y=x^3$ の逆関数は，$x=y^3$ を満たす。

よって　$\dfrac{dx}{dy}=3y^2$　　ゆえに，$x\fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3(y^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

別解　$y=x^3$ の逆関数は $y=x^{\frac{1}{3}}$ で　$\dfrac{dy}{dx}=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

(2) $y=g(x)$ とすると，条件から　$x=y^3+3y$ ……①　が満たされる。

①から　$g'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{3y^2+3}$

$x=0$ のとき　$y^3+3y=0$　すなわち　$y(y^2+3)=0$

$y^2+3>0$ であるから　$y=0$　　したがって　$g'(0)=\dfrac{1}{3\cdot 0^2+3}=\dfrac{1}{3}$

$\boxed{5}$

(解説)

$$(\text{与式})=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)-\{f(a-2h)-f(a)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{3\times\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}+2\times\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\right\}$$

$$=3\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}+2\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}$$

$$=3f'(a)+2f'(a)=5f'(a)$$

6

解説

(1) $y'=\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(2) $y'=3\cdot\left\{-\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}\cdot\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)'=-6\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(3) $y'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'=3\sin^2 x\cos x$

(4) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

別解　$y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ であるから　　$y'=\dfrac{1}{2}\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x$

7

解説

(1) $y'=\dfrac{1}{x^2-5}\cdot(x^2-5)'=\dfrac{2x}{x^2-5}$

(2) $y=\dfrac{1}{2}\log_2(x+1)$ であるから　　$y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(x+1)\log 2}=\dfrac{1}{2(x+1)\log 2}$

(3) $y'=(x)'\log x+x\cdot(\log x)'=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$

(4) $y'=(x+3)'e^{2x}+(x+3)(e^{2x})'=1\cdot e^{2x}+(x+3)e^{2x}\cdot 2$

$=(2x+7)e^{2x}$

(5) $y'=2^{-x^2}\log 2\cdot(-x^2)'=2^{-x^2}\log 2\cdot(-2x)=-2^{1-x^2}x\log 2$

8

解説

$x>0$ であるから　　$y=x^{\sin x}>0$

両辺の自然対数をとって　　$\log y=\sin x\log x$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=(\sin x)'\log x+\sin x\cdot(\log x)'$$

$$=\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}$$

よって　　$y'=\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$

9

解説

(1) $x^2+4y^2=16$ の両辺を x について微分すると　　$2x+8y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\neq 0$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{8y}=-\dfrac{x}{4y}$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=6\cos^2 t(-\sin t)=-6\cos^2 t\sin t$

$\dfrac{dy}{dt}=9\sin^2 t\cos t$

よって　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9\sin^2 t\cos t}{-6\cos^2 t\sin t}=-\dfrac{3}{2}\tan t$

10

解説

(1) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1\cdot(1+t)-t\cdot 1}{(1+t)^2}=\dfrac{1}{(1+t)^2}$，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t(1+t)-t^2\cdot 1}{(1+t)^2}=\dfrac{t^2+2t}{(1+t)^2}$

ゆえに　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{t^2+2t}{(1+t)^2}}{\dfrac{1}{(1+t)^2}}=t^2+2t$

ここで　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

よって　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(t^2+2t)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{(1+t)^2}}=(2t+2)\cdot(1+t)^2=2(t+1)^3$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=3\cos t$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3\cos t}{2\sin t}$

ここで　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

よって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{3\cos t}{2\sin t}\right)\cdot\dfrac{1}{-2\sin t}=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\tan t}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sin t}\right)$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sin t}\right)=-\frac{3}{4\sin^3 t}$$

$\boxed{11}$

(解説)

① の両辺を x で微分すると　$\dfrac{2x}{4}-\dfrac{2y}{9}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\neq0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9x}{4y}$

また，この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{1\cdot y-xy'}{y^2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{y-x\cdot\dfrac{9x}{4y}}{y^2}=\frac{9(4y^2-9x^2)}{16y^3}=\frac{9\cdot(-36)}{16y^3}=-\frac{81}{4y^3}$$

$\boxed{12}$

(解説)

(1)　$y'=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\cdot\dfrac{\cos x\cdot\cos x-(1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos x}{1+\sin x}\cdot\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)+\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x}{1+\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}$$

(2)　$x+\sqrt{1+x^2}=t$ とおくと　$y=\log\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|$

よって，$y=\log|t-1|-\log|t+1|$ であるから

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}=\frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}=\frac{2}{t^2-1}$$

$x+\sqrt{1+x^2}=t$ の両辺を 2 乗すると　$x^2+2x\sqrt{1+x^2}+(1+x^2)=t^2$

ゆえに　$t^2-1=2x(x+\sqrt{1+x^2})$　　よって　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{x(x+\sqrt{1+x^2})}$

また　$\dfrac{dt}{dx}=(x+\sqrt{1+x^2})'=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

したがって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x(x+\sqrt{1+x^2})}\cdot\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$\boxed{13}$

(解説)

(1)　$-x=h$ とおくと，$x\longrightarrow0$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{h\to0}(1+h)^{-\frac{1}{h}}=\lim_{h\to0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-1}=e^{-1}$

(2)　$-\dfrac{1}{x}=h$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow-0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{h\to-0}(1+h)^{-\frac{2}{h}}=\lim_{h\to-0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-2}=e^{-2}$

(3)　$\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-x}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$

$\dfrac{1}{x}=h$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow+0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{h\to+0}(1+h)^{-\frac{1}{h}}=\lim_{h\to+0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-1}=e^{-1}$