3　隣接３項間の漸化式　$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$　$(p\fallingdotseq 0)$

２次方程式 $px^2+qx+r=0$ の２つの解を α，β とする。

①　$\alpha\fallingdotseq\beta$ の場合

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$
$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

と変形する。数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は公比 β の等比数列，数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は公比 α の等比数列である。

特に，α，β の一方が１(このとき，$p+q+r=0$) の場合，階差数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ が等比数列になる。

②　$\alpha=\beta$ (重解) の場合

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

と変形する。数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は公比 α の等比数列である。

第５講　例題

$\boxed{1}$★★☆

数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和 S_n と a_n の間に，$S_n=-2a_n-2n+5$ の関係があるとき

(1)　初項 a_1 を求めよ。

(2)　a_n，a_{n+1} の２項間の関係式を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{2}$★★☆

$a_1=3$，$a_2=7$，$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$★★★

次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}$

(2)　$a_1=2$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$

$\boxed{4}$★★☆

$a_1=1$，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{5}$★★☆

条件 $a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

$\boxed{6}$★★★

1，2，3，4，5，6，7，8 の数字が書かれた 8枚のカードの中から１枚取り出してもとに戻すことを n 回行う。この n 回の試行で，数字 8 のカードが取り出される回数が奇数である確率 p_n を n の式で表せ。

第５講　例題演習

$\boxed{1}$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n-2a_n$ で表されるとき，a_n を n の式で表せ。

$\boxed{2}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0$

(2)　$a_1=1$，　$a_2=2$，　$2a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$

$\boxed{3}$

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$(n+1)a_{n+1}=na_n$

(2)　$a_1=1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n$

(3)　$a_1=3$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+2$

$\boxed{4}$

$a_1=1$，$a_{n+1}=2{a_n}^2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{5}$

条件 $a_1=4$，$b_1=3$，$a_{n+1}=5a_n+2b_n$，$b_{n+1}=2a_n+5b_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

$\boxed{6}$

四面体 OABC の頂点を移動する点 P がある。点 P は 1 つの頂点に達してから 1 秒後に，他の 3 つの頂点のいずれかにおのおの確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動する。最初に頂点 O にいた点 P が n 秒後に頂点 A にいる確率 p_n を求めよ。

第５講　レベルＡ

$\boxed{1}$

$a_1=1$，$a_2=6$，$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{2}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$，$na_{n+1}=(n+2)a_n+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　$a_n=n(n+1)b_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n の式で表せ。

(2)　a_n を n の式で表せ。

$\boxed{3}$［弘前大］

$a_1=\dfrac{2}{3}$，$(n+2)a_n=(n-1)a_{n-1}$　$(n\geqq 2)$によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$［三重大］

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+b_n$，$b_{n+1}=2a_n+4b_n$ で定めるとき

(1)　$a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ を満たす x，y の組を 2 組求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{5}$

自然数の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $(3+\sqrt{5})^n=a_n+b_n\sqrt{5}$ により定める。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2)　$c_n=a_n-b_n\sqrt{5}$ とするとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

第５講　レベルＢ

$\boxed{1}$

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-9}{a_n-5}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　すべての自然数 n に対して $a_n\fallingdotseq 3$ であることを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表せ。また，一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{2}$ [京都大]

正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が，次の条件 [A]，[B] を満たすとき，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ の値を求めよ.

[A]　$a_1=1$　　　[B]　$\log a_n-\log a_{n-1}=\log(n-1)-\log(n+1)$　$(n\geqq 2)$

$\boxed{3}$ [横浜国立大]

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=5$，$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=\dfrac{2}{3}a_na_{n+1}$　$(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ を満たす。

(1)　a_2，a_3 を求めよ。

(2)　a_{n+2} を a_n，a_{n+1} を用いて表せ。

(3)　一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{4}$ [名古屋大]

初めに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回 (n は自然数) 繰り返した後に A，B，C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3)　b_n を求めよ。

第６講　数学的帰納法

１０　数学的帰納法

1　**数学的帰納法**

一般に，自然数 n を含む条件 (A) があるとき，「すべての自然数 n について (A) が成り立つ」を証明するには，次の [1]，[2] を示せばよい。

[1]　$n=1$ のとき，(A) が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

注意　ある特定の自然数 l 以上のすべての自然数 n について，(A) が成り立つことを証明するには，[1] で $n=l$，[2] で $k\geqq l$ とすればよい。

数学的帰納法の証明には，他にも次のようなものがある。

①　$n\leqq k$ のときを仮定して，$n=k+1$ のときを証明。

②　$n=k$，$k+1$ のときを仮定して，$n=k+2$ のときを証明。ただし，この場合は [1] で例えば $n=1$，2 を証明する必要がある。

第６講　例題

$\boxed{1}$★★☆

n が自然数のとき，次の等式を数学的帰納法で証明せよ。

(1)　$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^n=\dfrac{1}{9}(10^{n+1}-1)$

(2)　$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+n(2n+1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$

$\boxed{2}$★★☆

n を自然数とするとき，$5^{n+1}+6^{2n-1}$ は 31 の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

$\boxed{3}$★★☆

$n\geqq5$ を満たす自然数 n に対して，$2^n>n^2$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。

$\boxed{4}$★★☆

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　a_n を n で表す式を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{5}$★★★

n は自然数とする。2 数 x，y の和，積がともに整数ならば，x^n+y^n は整数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

第６講　例題演習

$\boxed{1}$

n は自然数とする。数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

(1)　$1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\dfrac{1}{9}(10^n-1)$

(2)　$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

$\boxed{2}$

すべての自然数 n について，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{3}$

3 以上のすべての自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$3^{n-1}>n^2-n+2 \quad \cdots\cdots ①$$

$\boxed{4}$

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2$ と漸化式 $a_{n+1}=2-\dfrac{a_n}{2a_n-1}$ で定められている。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求め，一般項 a_n を表す n の式を推測せよ。

(2)　(1) で推測した一般項の式が正しいことを，数学的帰納法によって証明せよ。

$\boxed{5}$

実数 x,y について，$x+y$, xy がともに偶数とする。

自然数 n に対して x^n+y^n は偶数となることを示せ。

第６講　レベルＡ

$\boxed{1}$

数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$$

$\boxed{2}$［神戸大］

数列 $\{a_n\}$ は，条件 $a_1=7$，$a_{n+1}=(a_n)^3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定められるとする．n を自然数とするとき，a_n を 3^n で割ったときの余りが１になることを数学的帰納法によって証明せよ．

$\boxed{3}$

次の不等式が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ。

(1)　n が自然数のとき　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2<\dfrac{(n+1)^3}{3}$

(2)　n が自然数，$a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a^n+b^n}{2}\geqq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$

$\boxed{4}$［小樽商科大］

$a_n=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$ とする．

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対して，a_n を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定し，その推定が正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

$\boxed{5}$［日本女子大］

(1)　三角関数の加法定理を用いて，角 α，β に対して

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

　が成り立つことを示せ。

(2)　n が自然数のとき，数学的帰納法によって，次の等式が成り立つことを示せ。

$$(1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots\cdots+2\cos nx)\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{(2n+1)x}{2}$$

第６講　レベルＢ

$\boxed{1}$［南山大］

$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ が成立するように，有理数の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が与えられている．

(1)　a_{n+1} と b_{n+1} を，a_n と b_n で表せ．

(2)　$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，$(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ が成立することを数学的帰納法で証明せよ．

(3)　$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

$\boxed{2}$［筑波大］

x の関数 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次の式で定める．

$$\begin{cases} f_0(x)=1,\ \ f_1(x)=x \\ f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\ (n\geqq 2) \end{cases}$$

このとき，$f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表されることを示せ．ただし，$\sin\theta \fallingdotseq 0$ とする．

$\boxed{3}$［東京工業大］

2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α，β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍になることを示せ。

$\boxed{4}$［京都大］

数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して $0\leqq 3a_n\leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$ を満たしているとする。このとき，すべての n に対して $a_n=0$ であることを示せ。

章末問題A

$\boxed{1}$ [同志社大]

初項 a_1，公比 r が正の数である等比数列 $\{a_n\}$ について $a_2=6$，$a_5=48$ が成り立っている。

このとき，$a_1=$ ア $\boxed{}$，$r=$ イ $\boxed{}$ である。したがって，

$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=$ ウ $\boxed{}$ となる。$b_n=a_na_{n+1}$ とすると数列 $\{b_n\}$ も公比

エ $\boxed{}$ の等比数列となり，$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n=$ オ $\boxed{}$ である。

$\boxed{2}$ [北海道大]

2 次の整式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える。すべての自然数 n に対して $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{3}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ [(1)小樽商科大，(2) 和歌山県立医科大]

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2007}\sin\frac{k\pi}{3}$ を求めよ。

(2)　自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{12}\right)^2$ を求めよ。

$\boxed{4}$ [立教大]

3 で割り切れないすべての正の整数を，小さいものから順に並べてできる数列を
a_1，a_2，a_3，……，a_n，…… とする。

(1)　正の整数 m に対して，第 $2m$ 項 a_{2m} を m の式で表せ。

(2)　正の整数 n に対して，和 $S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を n の式で表せ。

(3)　$S_n\geqq 600$ となる最小の正の整数 n を求めよ。

$\boxed{5}$ [学習院大]

数列 $\{a_n\}$ は等差数列，$\{b_n\}$ は公比が正の等比数列で，$a_1=1$，$b_1=3$，$a_2+2b_2=21$，
$a_4+2b_4=169$ を満たすとする。

(1)　一般項 a_n，b_n を求めよ。　　　　(2)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}$ を求めよ。

$\boxed{6}$ [名城大]

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が $S_n=n^3+3n^2+2n$ であるとする。

(1) a_1，a_2 を求めよ。　　(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{a_k}$ を求めよ。

$\boxed{7}$ [防衛医科大学校]

$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}\right)$ を小数表示したとき，整数部分の値を求めよ。

$\boxed{8}$ [大阪工業大]

数列 $\log_2 1$，$\log_2 2$，$\log_3 1$，$\log_3 2$，$\log_3 3$，$\log_4 1$，$\log_4 2$，$\log_4 3$，$\log_4 4$，$\log_5 1$，$\log_5 2$，…… について，次の問いに答えよ。

(1) $\log_3 2=a$ として，初項から第 10 項までの和を a の式で表せ。

(2) 第 k 項が初項から数えて n 番目の 0 となるとき，k を n の式で表せ。

(3) 第 2031 項の値と $\dfrac{1}{2}$ との大小を比較せよ。

$\boxed{9}$ [大阪大]

条件 $1<x<2^{n+1}$ および $0<y\leqq\log_2 x$ をみたす整数 x，y を座標とする点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

$\boxed{10}$ [佐賀大]

$\angle\mathrm{XPY}=60^\circ$ となる 2 つの半直線 PX，PY に接する半径 1 の円を O_1 とする。$n\geqq2$ に対しては，半直線 PX，PY および円 O_{n-1} に接する円のうち半径の小さい方の円を O_n とする。また，円 O_n の半径と面積をそれぞれ r_n，S_n とする。

(1) r_n を求めよ。

(2) $\pi<3.15$ を利用し，任意の自然数 n について $S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n<3.6$ となることを示せ。

章末問題A

11 [徳島大]

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たしているとする。

$$a_1=2,\ 3na_{n+1}=(n+1)a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおいて数列 $\{b_n\}$ の漸化式を導き，一般項 b_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1}-\frac{1}{3}a_k\right)$ を求めよ。

12 [中央大]

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$ であり，漸化式

$$a_{n+1}=\frac{2}{n+1}a_n+\frac{1}{(n+1)!}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) $b_n=\dfrac{n!}{2^n}a_n$ とおき，b_{n+1} を b_n で表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

13 [甲南大]

$a_1=1$，$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+3a_3+\ \cdots\cdots\ +na_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

14 [弘前大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められているとき，次の問いに答えよ。

(1) $b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{15}$ [静岡大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n 2^{6n^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める。

(1)　$b_n=\log_2 a_n$ とし，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　a_{10} の桁数を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

$\boxed{16}$ [京都大]

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す．この数列が $a_1=0$，$a_2=1$，$(n-1)^2 a_n=S_n$ $(n\geqq 1)$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{17}$ [三重大]

$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次のように定められた正の数の数列とする。

$$a_1=4,\ b_1=2,\ a_{n+1}={a_n}^2 b_n,\ b_{n+1}=a_n {b_n}^2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　α_n，β_n を $\alpha_n=\log_2 a_n$，$\beta_n=\log_2 b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定めるとき，$\alpha_n+\beta_n$ を n の式で表せ。

(2)　$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ \cdots\cdots\ +n\cdot 3^n=\dfrac{2n-1}{4}3^{n+1}+\dfrac{3}{4}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\log_2(a_1{a_2}^2{a_3}^3\cdots\cdots {a_n}^n)$ を求めよ。

$\boxed{18}$ [横浜国立大]

xy 平面上の曲線 $y=x^2$ を C とする。点 $\mathrm{P}_0(2,\ 4)$ における C の接線が直線 $y=2$ と交わる点を $\mathrm{Q}_1(a_1,\ 2)$ とする。次に，点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ {a_1}^2)$ における C の接線が直線 $y=a_1$ と交わる点を $\mathrm{Q}_2(a_2,\ a_1)$ とする。以下同様に，点 $(a_n,\ {a_n}^2)$ を P_n とし，P_n における C の接線が $y=a_n$ と交わる点を $\mathrm{Q}_{n+1}(a_{n+1},\ a_n)$ として，P_2，Q_3，P_3，Q_4，…… を定める。
次の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。　　　　(2)　a_n を n の式で表せ。

(3)　線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$，線分 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$，および C で囲まれる部分の面積を n の式で表せ。

$\boxed{19}$［首都大学東京］

数列 $\{a_n\}$ が次の式によって与えられているとする。

$$a_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

(1)　$n=1$，2，3，4 に対して，それぞれ $2(n+1)a_n$ の値を求めよ。

(2)　a_n の一般項を推定し，推定した式がすべての自然数 n に対して正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　$a_n>\dfrac{1}{2}+\dfrac{100}{n^2}$ を満たす最小の n を求めよ。

章末問題B

$\boxed{1}$ [横浜国立大]

n を 6 以上の自然数とする．$(x+1)^n$ の展開式における x^4，x^5，x^6 の係数がこの順に等差数列をなすとき，n およびこの等差数列の公差を求めよ．

$\boxed{2}$ [京都大]

数列 $\{x_n\}$ を $x_n=-an^2+bn+c$，$n=1$，2，3，…… によって定める。

このとき，次の 2 つの条件 (A)，(B) を満たす自然数 a，b，c の値を求めよ。

(A)　4，x_1，x_2 はこの順で等差数列である。

(B)　すべての自然数 n に対して $\left(\dfrac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)^2 \geqq x_n x_{n+1}+1$ が成り立つ。

$\boxed{3}$ [同志社大]

1080 の正の約数の個数を n とし，約数を小さい順に a_1，a_2，……，a_n とする。

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とし，次の問いに答えよ。

(1)　1080 の正の約数の個数 n の値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\log_{10}a_i$ の値を求めよ。

(3)　$\log_{10}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ [東京工業大]

$\log_{10}3=0.4771$ として，$\displaystyle\sum_{n=0}^{99}3^n$ の桁数を求めよ。

$\boxed{5}$ [南山大]

n は 3 以上の整数とする。1 から n までの番号のついた n 個の袋があり，それぞれの袋に赤球と白球を入れていく。番号 r の袋に入れる赤球の数は $(r-1)$ 個，白球の数は $(n-r)$ 個である。このようにすべての袋に球を入れ終った後で，でたらめに選んだ 1 つの袋から 1 球ずつ 2 回球を取り出すとする。ただし，取り出した球はもとに戻さない。このとき，1 回目が赤球である確率を求めよ。また，1 回目も 2 回目もともに赤球である確率を求めよ。

6 [横浜国立大]

自然数 n に対して，$\sqrt{n}$ に最も近い整数を a_n とする。

(1) a_7，a_{50} を求めよ。

(2) m を自然数とするとき，$a_n=m$ となる自然数 n の個数を m を用いて表せ。

(3) $\sum_{k=1}^{2001} a_k$ を求めよ。

7 [慶応義塾大]

自然数 k，n に対して $f_k(n)=n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k-1)$ とする。このとき

$$f_{k+1}(n)-f_{k+1}(n-1)=\left(^{ア}\boxed{}\right)f_k(n) \quad (n \geqq 2)$$

よって　$\sum_{r=1}^{n} f_k(r)={}^{イ}\boxed{}f_{k+1}(n)$

これより　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)={}^{ウ}\boxed{}n(n+1)\left(^{エ}\boxed{}\right)$

一般に，$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+k)={}^{オ}\boxed{}\dfrac{\left(n+{}^{カ}\boxed{}\right)!}{(n-1)!}$ となる。

8 [名古屋市立大]

数列 1，1，3，1，3，5，1，3，5，7，1，3，5，7，9，1，…… において，次の問いに答えよ。ただし，k，m，n は自然数とする。

(1) $k+1$ 回目に現れる 1 は第何項か。

(2) m 回目に現れる 17 は第何項か。

(3) 初項から $k+1$ 回目の 1 までの項の和を求めよ。

(4) 初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_n>1300$ となる最小の n を求めよ。

9 [大阪府立大]

n は自然数とする。3 本の直線 $3x+2y=6n$，$x=0$，$y=0$ で囲まれる三角形の周および内部にあり，x 座標と y 座標がともに整数である点は全部でいくつあるか。

10 [岡山大]

数列 $\{a_n\}$ が次のように定められている。

$$a_1=0, \quad a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (n\text{ が奇数のとき}) \\ a_n+1 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) n が奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4} を a_n で表せ。

(2) a_n を 3 で割ったときの余りを求めよ。

11 [慶応義塾大]

A を与えられた自然数として，

$$a_1=3A,\quad a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (n\text{ が奇数のとき}) \\ a_n-1 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1)　a_5，a_6 を A を用いて表すと，$a_5=$ ${}^{ア}\boxed{}$，$a_6=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

また一般に，a_n を n と A を用いて表すと，

$$a_n=\begin{cases} {}^{ウ}\boxed{} & (n\text{ が奇数のとき}) \\ {}^{エ}\boxed{} & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

となる。

(2)　$a_n>0$ となる最大の自然数 n を N とする。N を A を用いて表すと $N=$ ${}^{オ}\boxed{}$ であり，また $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n=$ ${}^{カ}\boxed{}$ である。

12 [同志社大]

直角三角形 ABC において，AB$=a$，BC$=1$，$\angle \mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$ であるとする。辺 AC 上に点 $\mathrm{A_1}$，辺 BC 上に点 $\mathrm{B_1}$ を $\mathrm{A_1B_1}=\mathrm{BB_1}$ かつ $\angle \mathrm{A_1B_1C}=\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる。次に，直角三角形 $\mathrm{A_1B_1C}$ において，辺 $\mathrm{A_1C}$ 上に点 $\mathrm{A_2}$，辺 $\mathrm{B_1C}$ 上に点 $\mathrm{B_2}$ を $\mathrm{A_2B_2}=\mathrm{B_1B_2}$ かつ $\angle \mathrm{A_2B_2C}=\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる。これを繰り返し，点 A_n，B_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を順次定める。また，$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n=a_n$ とおく。

(1)　a_1 を a を用いて表せ。　　(2)　a_n を a，n を用いて表せ。

(3)　$\triangle \mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{B}_{k+1}$ の面積を S_k とする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ を a，n を用いて表せ。

13 [大阪大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=8a_n^{\ 2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$b_n=\log_2 a_n$ とおく。b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$P_n=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$ とおく。数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　$P_n>10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

14 [首都大学東京]

平行四辺形 ABCD において AB＝BC＝AC＝1 であるとする。対角線 AC と BD の交点を M とするとき，次の問いに答えよ。

(1) M から辺 BC に下ろした垂線を MP とし，M から辺 AD に下ろした垂線を ME_1 とする。線分 BE_1 と AC の交点を F_1 とし，F_1 から辺 BC に下ろした垂線を F_1Q_1 とするとき，線分 BQ_1 の長さを求めよ。

(2) F_1 から辺 AD に下ろした垂線を F_1E_2 とし，線分 BE_2 と AC の交点を F_2 とし，F_2 から辺 BC に下ろした垂線を F_2Q_2 とする。以下，この操作を繰り返して点 E_n，F_n，Q_n $(n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ をとるものとする。線分 BQ_n の長さを a_n とするとき，線分 BQ_{n+1} の長さ a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3) 線分 BQ_n の長さを求めよ。

15 [東北大]

あるウイルスの感染拡大について次の仮定で試算を行う。このウイルスの感染者は感染してから 1 日の潜伏期間をおいて，2 日後から毎日 2 人の未感染者にこのウイルスを感染させるとする。新たな感染者 1 人が感染源となった n 日後の感染者数を a_n 人とする。たとえば，1 日後は感染者は増えず $a_1=1$ で，2 日後は 2 人増えて $a_2=3$ となる。

(1) a_{n+2}，a_{n+1}，a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) 感染者数が初めて 1 万人を超えるのは何日後か求めよ。

16 [埼玉大]

各面に 1 から 8 までの数字が 1 つずつ書かれた正八面体のさいころを繰り返し投げ，n 回目までに出た数字の合計を $X(n)$ とする。$X(n)$ が 3 で割り切れる確率を a_n，$X(n)$ を 3 で割ったとき 1 余る確率を b_n，$X(n)$ を 3 で割ったとき 2 余る確率を c_n とする。ただし，1 から 8 までの数字の出る確率はどれも同じとする。

(1) a_1，b_1，c_1 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ。

(3) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(4) a_n，b_n，c_n を求めよ。

章末問題B

$\boxed{17}$［一橋大］

AとBの2人が，1個のさいころを次の手順により投げあう。

1回目はAが投げる。

1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる。

4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる。

6の目が出たら，投げた人を勝ちとし，それ以降は投げない。

(1)　n 回目にAがさいころを投げる確率 a_n を求めよ。

(2)　ちょうど n 回目のさいころ投げでAが勝つ確率 p_n を求めよ。

(3)　n 回以内のさいころ投げでAが勝つ確率 q_n を求めよ。

$\boxed{18}$［大阪大］

さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を5で割った余りが1である確率を p_n とし，余りが2，3，4のいずれかである確率を q_n とする。

(1)　p_n+q_n を求めよ。

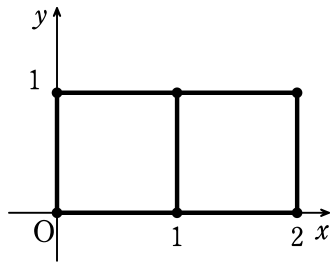
(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3)　$r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ。

$\boxed{19}$［京都大］

xy 平面上の6個の点 (0，0)，(0，1)，(1，0)，(1，1)，(2，0)，(2，1) が図のように長さ1の線分で結ばれている。動点Xは，これらの点の上を次の規則に従って1秒ごとに移動する。

規則：動点Xは，そのときに位置する点から出る長さ1の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する。



例えば，Xが (2，0) にいるときは，(1，0)，(2，1) のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。

またXが (1，1) にいるときは，(0，1)，(1，0)，(2，1) のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する。時刻0で動点XがO＝(0，0) から出発するとき，n 秒後にXの x 座標が0である確率を求めよ。ただし n は0以上の整数とする。

$\boxed{20}$ [県立広島大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=-1,\ a_{n+1}=\frac{5a_n+9}{-a_n+11}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3) $a_n<3$ を示せ。

(4) $a_n<a_{n+1}$ を示せ。

(5) a_n が自然数となる n をすべて求めよ。

$\boxed{21}$ [金沢大]

次の問いに答えよ。ただし，${}_m\mathrm{C}_k$ は m 個から k 個取る組合せの総数を表す。

(1) $k=1$，2，3，4，5，6 に対して，${}_7\mathrm{C}_k$ は 7 の倍数であることを示せ。

(2) p は素数とし，k は $1\leqq k\leqq p-1$ を満たす自然数とする。${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であることを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

$\boxed{22}$ [鳥取大]

以下の式で定義される整式の列 $\{f_n(x)\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ について，次の問いに答えよ。

$$f_1(x)=\frac{1}{2}x+2$$

$$x^2f_{n+1}(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x tf_n(t)\,dt\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) 数学的帰納法を用いて，$f_n(x)$ は x の 1 次式であることを示せ。

(3) $f_n(x)$ を求めよ。

$\boxed{23}$ [福井大]

次の条件で定められた数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{3}{n}(a_1+a_2+\ \cdots\cdots\ +a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_2，a_3，a_4，a_5，a_6 を求めて，一般項 a_n を n の式で表せ.

(2) (1) で求めた一般項 a_n が正しいことを数学的帰納法を用いて示せ.

$\boxed{24}$［東京大］

a, b は実数で $a^2+b^2=16, a^3+b^3=44$ を満たしている．

(1)　$a+b$ の値を求めよ．

(2)　n を 2 以上の整数とするとき，a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ．

章末問題C

1 [横浜市立大]

n を自然数とする。このとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}$ を求めよ。

2 [東京理科大]

数列 x_1，x_2，……，x_n は n 個の自然数 1，2，……，n を並べ替えたものである。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)^2+\sum_{k=1}^{n}(x_k-n+k-1)^2$ を n の式で表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)^2$ が最大となる x_1，x_2，……，x_n の並べ方を求めよ。

3 [金沢大]

自然数が 1 つずつ書かれている玉が，

① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④ ① ② ③ ④ ⑤ ① ② ……

のように 1 列に並べられている。

(1) 数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か。

(2) 自然数 n に対し，$2n^2$ 番目の玉に書かれている数は何か。

(3) 1 番目から $2n^2$ 番目までの玉をすべて袋に入れた。この袋から 2 つの玉を取り出すとき，同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ。

4 [北海道大]

$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ を第 n 項とする数列を，次のように奇数個ずつの群に分ける。

$\{a_1\}$，$\{a_2,\ a_3,\ a_4\}$，$\{a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9\}$，……

第 1 群　第 2 群　第 3 群

k を自然数として，以下の問いに答えよ。

(1) 第 k 群の最初の項を求めよ。

(2) 第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k を求めよ。

(3) $(k^2+1)S_k\leqq\dfrac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 k を求めよ。

$\boxed{5}$ [横浜国立大]

(1) k を 0 以上の整数とするとき，

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq k$$

を満たす 0 以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を a_k とする。a_k を k の式で表せ。

(2) n を 0 以上の整数とするとき，

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z\leqq n$$

を満たす 0 以上の整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を b_n とする。b_n を n の式で表せ。

$\boxed{6}$ [横浜国立大]

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を $a_1=3$，$b_1=8$，$c_1=24$ と関係式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=4b_n+c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ c_{n+1}=8c_n \end{cases}$$

で定める。

(1) b_n を n の式で表せ。

(2) $a_{n+3}-a_n$ は 7 で割り切れることを示し，a_n が 7 で割り切れるための n の条件を求めよ。

$\boxed{7}$ [九州大]

数列 a_1，a_2，……，a_n，…… は

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1-{a_n}^2},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

を満たしているとする。

(1) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1=\tan\dfrac{\pi}{20}$ とするとき，

$$a_{n+k}=a_n,\quad n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$$

を満たす最小の自然数 k を求めよ。

$\boxed{8}$ [横浜国立大]

赤，青，黄の3色を用いて，横1列に並んだ n 個のマスを，隣り合うマスは異なる色になるように塗り分ける。ただし，使わない色があってもよい。両端のマスが同じ色になる場合の数を a_n とし，両端のマスが異なる色になる場合の数を b_n とする。

(1) a_3，b_3，a_4，b_4 を求めよ。　(2) a_n，b_n $(n \geqq 3)$ を n の式で表せ。

$\boxed{9}$ [京都大]

先頭車両から順に1から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし $n \geqq 2$ とする。各車両を赤色，青色，黄色のいずれか1色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。

$\boxed{10}$ [東京大]

どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く。さいころを投げ，出た目が1，2，3のときは文字列AAを書き，4のときは文字Bを，5のときは文字Cを，6のときは文字Dを書く。更に繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，Dをすでにある文字列の右側につなげて書いていく。例えば，さいころを5回投げ，その出た目が順に2，5，6，3，4であったとすると，得られる文字列は，AACDAABとなる。このとき，左から4番目の文字はD，5番目の文字はAである。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字がAとなる確率を求めよ。

(2) n を2以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字がAで，かつ n 番目の文字がBとなる確率を求めよ。

$\boxed{11}$ [筑波大]

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとする。また，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とおく。

(1) $b_n \geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(2) b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ の一の位の数が2であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) a_{2017} の一の位の数を求めよ。

$\boxed{12}$［大阪大］

正の整数 n に対して

$$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p},\quad T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$$

とおく。等式 $S(n)=T(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ。

$\boxed{13}$［一橋大］

θ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=\cos\theta$，$a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定める。すべての n について $a_n=\cos(n-1)\theta$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を求めよ。

$\boxed{14}$［東京大］

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して $a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

$\boxed{15}$［京都大］

n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$ $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\ \cdots\cdots\ +\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ。