1 [2013 センター]

解答　(1)　❻　　(2)　❷

(1)　図 a のように x 軸，y 軸をとり，ばねと x 軸がなす角を θ とする。小球と帯を一体と考えた物体にはたらく力は，x 軸の正の向きにはたらく大きさ F の手が加える力と，ばねの方向にはたらく大きさ f が等しい 2 つの弾性力である。よって，x 軸方向の力のつりあいから

$$F-f\cos\theta\times 2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

となる。ここで，ばねの伸びは $l'-l$ なので，弾性力の大きさは

$$f=k(l'-l) \quad \cdots\cdots ②$$

である。また，図より

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{l'^2-l^2}}{l'} \quad \cdots\cdots ③$$

である。よって，①，②，③ 式から

$$F=2f\cos\theta=2k(l'-l)\frac{\sqrt{l'^2-l^2}}{l'}$$

となる。

以上より，正しいものは ❻。

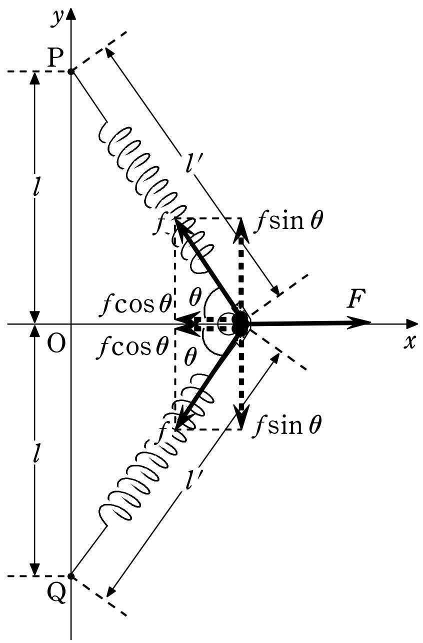


図 a

(2)　手をはなした瞬間から点 O を通過するまでの間，弾性力だけが小球に仕事をするので力学的エネルギーが保存する。手をはなした瞬間の小球の速さは 0 で，2 本のばねが長さ $l'-l$ だけ伸びている。よって，その力学的エネルギーは

$$E_1=\frac{1}{2}k(l'-l)^2\times 2$$

である。小球が O を通過する瞬間，ばねは自然の長さにもどる。よって，小球が O を通過する瞬間の力学的エネルギーは

$$E_2=\frac{1}{2}mv^2$$

となる。したがって，力学的エネルギー保存則より，$E_2=E_1$ なので

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(l'-l)^2\times 2$$

となり

$$v=\sqrt{\frac{2k}{m}}(l'-l)$$

となる。

以上より，正しいものは ❷。

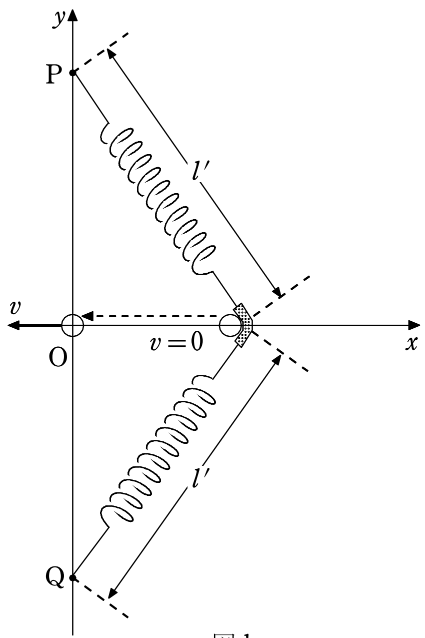


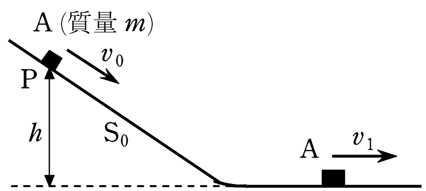
図 b

2 [2003 センター]

解答　(1)　❻　　(2)　❹　　(3)　❺

(1)　S_0 はなめらかで摩擦のない斜面なので，小物体 B に衝突する直前と高さ h の点 P で，力学的エネルギーが保存する。
したがって，

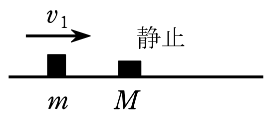
$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+mgh=\frac{1}{2}mv_1{}^2$$



よって　$v_1=\sqrt{v_0{}^2+2gh}$

となる。したがって，答えは ⑥。

衝突前



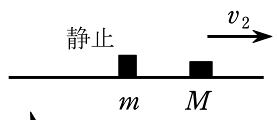
(2)　衝突の前後で運動量が保存するので，右向きを正として

$$mv_1+M\cdot 0=m\cdot 0+Mv_2$$

よって　$v_2=\dfrac{m}{M}v_1$

となる。したがって，答えは ④。

衝突後



(3)　小物体 B が斜面 S_1 上を上昇するときにはたらく力は，図のように重力 Mg，垂直抗力 N，動摩擦力 f' である。ここで，f' は

$$f'=\mu' N$$

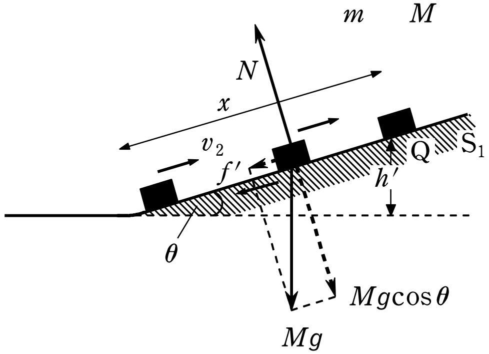
であり，斜面に垂直方向の力のつりあいから

$$N-Mg\cos\theta=0$$

であるから

$$f'=\mu' Mg\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

となる。



物体 B が斜面を上昇していくとき，力学的エネルギーはこの摩擦力がした仕事の分だけ減少する。したがって，斜面を上昇しはじめてから静止する点 Q までの斜面方向の距離を x，点 Q の高さを h' とすると

$$\frac{1}{2}Mv_2{}^2-Mgh'=f'\cdot x \quad \cdots\cdots ②$$

となる。ここで図から

$$x=\frac{h'}{\sin\theta} \quad \cdots\cdots ③$$

なので，② に ①，③ を代入して

$$\frac{1}{2}Mv_2{}^2-Mgh'=\mu' Mg\cos\theta\frac{h'}{\sin\theta}$$

$$h'\left(Mg+\mu' Mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{1}{2}Mv_2{}^2$$

$$h'Mg\frac{\sin\theta+\mu'\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{2}Mv_2{}^2$$

ゆえに　$h'=\dfrac{1}{2}Mv_2{}^2\dfrac{\sin\theta}{Mg(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}$

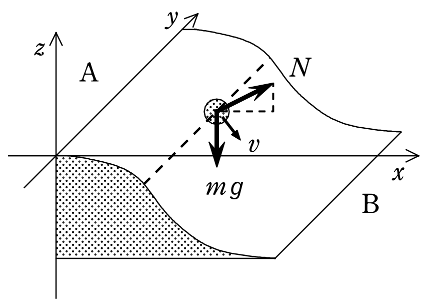
$$=\frac{v_2{}^2\sin\theta}{2g(\sin\theta+\mu'\cos\theta)}$$

となる。したがって，答えは ⑤。

3 [2005 センター]

解答　(1)　⑤　　(2)　④　　(3)　③

(1)　斜面台上を運動するときに，小物体にはたらく力は，重力 mg と垂直抗力 N である。このとき，垂直抗力 N と小物体の速度 v の向きはつねに直角であり，N は小物体に仕事をしない。よって，保存力である重力のする仕事だけで小物体の運動が変化するので，力学的エネルギーが保存する。したがって，高さの基準を水平面 B とすると，



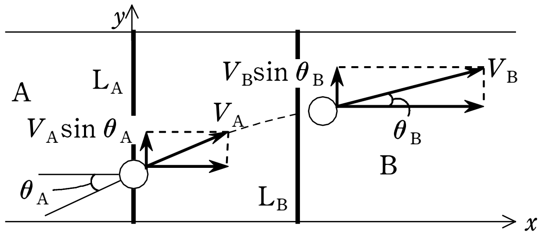
$$\frac{1}{2}mV_B{}^2=\frac{1}{2}mV_A{}^2+mgh$$

よって，

$$V_B=\sqrt{V_A{}^2+2gh}$$

以上より，正しいものは　⑤。

(2)　座標軸を (1) の図のようにとると，L_A，L_B に垂直な断面の形が場所によらず一定なので，垂直抗力 N の y 成分は 0 である。また，重力は z 成分のみである。よって，小物体にはたらく外力の y 軸方向の成分はないので，



水平面 A と B 上で y 軸方向の運動量は保存する。したがって，

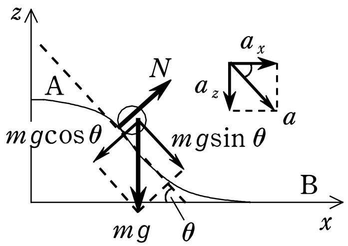
$$mV_A\sin\theta_A = mV_B\sin\theta_B$$

よって，

$$V_A\sin\theta_A = V_B\sin\theta_B$$

以上より，正しいものは　④。

(3)　断面の接線と x 軸がなす角を θ とする。小物体は斜面台上を運動するので，接線に垂直な方向の力はつりあっている。したがって，小物体に生じる加速度 a の向きは接線方向下向きであり，運動方程式より



$$ma = mg\sin\theta \qquad ゆえに \quad a = g\sin\theta$$

よって，加速度 a の z 成分は

$$a_z = -a\sin\theta = -g\sin^2\theta$$

となり，z 軸の負の方向の速さが増加していく。θ が x によらず一定のときは，速度の z 成分 v_z は

$$v_z = -g\sin^2\theta\cdot t$$

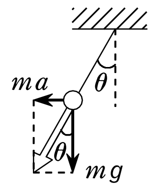
となり，負の値で大きさが一定の割合で増加する。また，水平面 A，B 上では $v_z=0$ である。したがって，小物体の運動量の鉛直成分 $p_z = mv_z$ は，水平面 A 上では $p_z=0$ であり，斜面台上を運動するときに負の値で大きさが増加し，水平面Bに達した瞬間に再び $p_z=0$ になる。

以上より，正しいものは　③。

4 ［2017 センター］

解答　(1) ①　　(2) ④　　(3) ②

(1) 図のように，重力と慣性力の合力が鉛直線と角 θ をなす向きとなるから



$$\frac{ma}{mg} = \tan\theta \quad より \quad a = g\tan\theta$$

以上より，正しいものは ①。

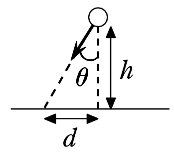
(2) 鉛直方向の運動は自由落下とみなされるので，床に達するまでの時間を t とすると

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad より \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

電柱から見れば，小物体の水平方向の運動は，糸を切った後，速さ v の等速直線運動と同様であり，$D = vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$

以上より，正しいものは ④。

(3) 電車の中から見ると，小物体の初速度は 0 で，重力と慣性力の合力により加速されていくので，物体はこの合力の向きに進んでいくことになる。よって，図のように



$$d = h\tan\theta$$

以上より，正しいものは ②。

5

解答　(1)　$m(g\cos\theta - A\sin\theta)$　　(2)　$g\sin\theta + A\cos\theta$　　(3)　$\dfrac{N\sin\theta}{M}$

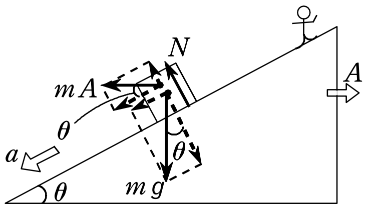
(4)　$\dfrac{mg\cos\theta\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}$　　(5)　$\dfrac{m\cos\theta}{M+m}l$

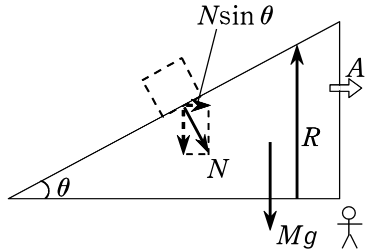
ヒント　(1)，(2)　三角柱上から見ると，小物体には慣性力がはたらき，斜面方向にのみ運動しているとみなせる。

(5)　小物体が点 b に達するまでの間，三角柱は大きさ A の加速度で等加速度直線運動する。

小物体の運動は三角柱上で観測することとし，慣性力を加える。三角柱の運動は水平面から観測するから，実在の力だけで考える。小物体および三角柱にはたらく力を図示

すると，次図のようになる。





(1) 三角柱上から見て，小物体の斜面に垂直な方向の力のつりあいは

$$N+mA\sin\theta=mg\cos\theta \qquad \text{よって} \quad \boldsymbol{N=m(g\cos\theta-A\sin\theta)}$$

(2) 三角柱上から見て，小物体の斜面方向の運動方程式は

$$ma=mA\cos\theta+mg\sin\theta \qquad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=g\sin\theta+A\cos\theta}$$

(3) 水平面から三角柱の運動を調べると，三角柱には重力 Mg，水平面からの垂直抗力，そして小物体からの垂直抗力 N がはたらく。三角柱の水平方向の運動方程式は右向きを正として

$$MA=N\sin\theta \qquad \text{よって} \quad A=\boldsymbol{\frac{N\sin\theta}{M}}$$

(4) (1) の N を (3) に代入して

$$MA=m(g\cos\theta-A\sin\theta)\sin\theta$$

$$(M+m\sin^2\theta)A=mg\cos\theta\sin\theta \qquad \text{よって} \quad A=\boldsymbol{\frac{mg\cos\theta\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}}$$

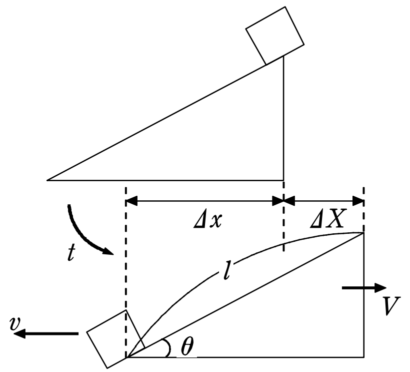
(5) 小物体が b に達するまでの時間 t に，三角柱も加速度 A で運動するから

$$l=\frac{1}{2}a\cdot t^2 \qquad L=\frac{1}{2}At^2$$

よって $L=\dfrac{1}{2}A\cdot\dfrac{2l}{a}=\dfrac{A}{a}l=\dfrac{Al}{g\sin\theta+A\cos\theta}$

A を代入して整理すると

$$L=\frac{l}{\dfrac{g\sin\theta}{A}+\cos\theta}=\frac{l}{\dfrac{M+m\sin^2\theta}{m\cos\theta}+\cos\theta}=\boldsymbol{\frac{m\cos\theta}{M+m}l}$$



【参考】 三角柱と小物体の間では水平方向には外力がはたらかないから水平方向の運動量が保存する。

右向きを正とすると，運動量保存則より

$$0=m(-v)+MV$$

よって $mv=MV$ …… ①

ここで，水平面から見た小物体の加速度の大きさを a' とすると，$v=a't$ だから

$$\Delta x=\frac{1}{2}a't^2=\frac{1}{2}vt$$

同様に，$V=At$ だから

$$\Delta X=\frac{1}{2}At^2=\frac{1}{2}Vt$$

したがって，① 式より

$m\Delta x=M\Delta X$ …… ②

$\Delta x+\Delta X=l\cos\theta$ であるから，これと ② 式より

$$L=\Delta X=\boldsymbol{\frac{m\cos\theta}{M+m}}l$$

6 [2017 宇都宮大]

【解答】 (1) $\sqrt{2gh}$，$\dfrac{m_0}{m}<e\leqq 1$

(2) (a) α：$-\mu' g$，β：$\dfrac{\mu' m}{M}g$ (b) t：$\dfrac{Mv_0}{\mu' g(m+M)}$，$d$：$\dfrac{M{v_0}^2}{2\mu' g(m+M)}$

【ヒント】 (2)(b) 『台 R に対して静止する』⟹ 台 R と一体となって同じ速さで運動する

(Q が台上を進んだ距離)

=(水平面に対して Q が進んだ距離)−(水平面に対して R が進んだ距離)

(1) 力学的エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}m_0v^2=m_0gh$ よって $v=\boldsymbol{\sqrt{2gh}}$

また，衝突直後の P，Q の速度をそれぞれ v_P，v_Q (右向きを正) とすると，運動量保存則および反発係数の式は

	P	Q
質量	m_0	m
衝突前	v	0
衝突後	v_P	v_Q

$$m_0v = m_0v_P + mv_Q \quad \cdots\cdots ①$$

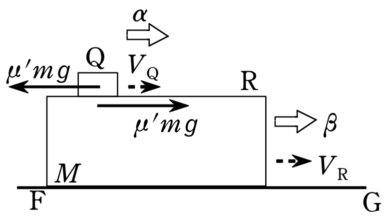
$$e = -\frac{v_P - v_Q}{v - 0} \quad \cdots\cdots ②$$

①，② 式から $v_P = \dfrac{m_0 - em}{m_0 + m}v$

P が左向きにはね返る条件は $v_P < 0$

よって $m_0 - em < 0$ ゆえに $e > \dfrac{m_0}{m}$

これと $0 \leqq e \leqq 1$ とから $\dfrac{m_0}{m} < e \leqq 1$ ※A←



(2)(a) Q が受ける水平方向の力は $\mu' mg$ (左向き) であるから，運動方程式は

$$m\alpha = -\mu' mg \qquad \text{よって} \quad \alpha = -\mu' g$$

台 R が受ける力は $\mu' mg$ (右向き) であるから

$$M\beta = \mu' mg \qquad \text{よって} \quad \beta = \frac{\mu' m}{M}g$$

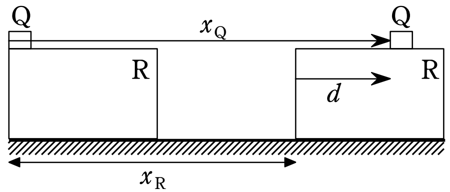
(b) 時刻 t での Q，R の速度をそれぞれ V_Q，V_R とすると

$$V_Q = v_0{}^{※B←} + \alpha t,\ V_R = \beta t$$

台 R に対して，Q が静止するのは $V_Q = V_R$ のときであるから

$$v_0 + \alpha t = \beta t \qquad \text{よって} \quad t = \frac{v_0}{\beta - \alpha} = \frac{v_0}{\frac{\mu' m}{M}g - (-\mu' g)} = \frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)} \ ※C←$$

また，時刻 t までの，水平面 FG に対する Q，R の変位 (移動距離) をそれぞれ x_Q，x_R とすると



$$x_Q = v_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2,\ x_R = \frac{1}{2}\beta t^2$$

Q が R に対して進んだ距離 d は

$$d = x_Q - x_R = v_0t + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)t^2$$

$$= v_0\left(\frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)}\right) - \frac{\mu' g(m+M)}{2M}\left(\frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)}\right)^2 = \frac{Mv_0{}^2}{2\mu' g(m+M)} \ ※D←$$

別解 v-t グラフの面積は進んだ距離を表す。Q，R の v-t グラフをかくと図 a のようになり，求める距離 d は図に示した三角形の面積になる。

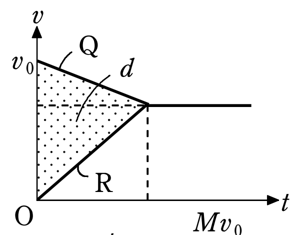


図 a $t = \dfrac{Mv_0}{\mu' g(m+M)}$

$$d = \frac{1}{2}\cdot v_0 \cdot \frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)} = \frac{Mv_0{}^2}{2\mu' g(m+M)}$$

←※A 注 $e \leqq 1$ を忘れやすい。

←※B (1) の式の v_Q を v_0 としている。

←※C 別解 Q，R が一体となった後の速度を V とすると，運動量保存則より

$$mv_0 = (m+M)V \qquad \text{よって} \quad V = \frac{m}{m+M}v_0$$

台 R についての運動量の変化と力積の関係より

$$MV - 0 = \mu' mg \cdot t$$

$$\text{よって} \quad t = \frac{MV}{\mu' mg} = \frac{Mv_0}{\mu' g(m+M)}$$

←※D 別解 R から見た Q の相対加速度は

$$\alpha_{RQ} = \alpha - \beta = -\mu' g - \frac{\mu' m}{M}g = -\frac{M+m}{M}\mu' g$$

Q が台上で止まるまでの距離 d は「$v^2 - v_0{}^2 = 2ax$」より

$$0^2 - v_0{}^2 = 2\left(-\frac{M+m}{M}\mu' g\right)\cdot d$$

$$\text{よって} \quad d = \frac{Mv_0{}^2}{2\mu' g(M+m)}$$