$\boxed{1}$

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。
Q 地域ではレモンを栽培しており，収穫されるレモンを重さによってサイズごとに分類している (表 1) 。過去に収穫されたレモンの重さは，平均が 110 g，標準偏差が 20 g の正規分布に従うとする。

表 1　レモンのサイズと重さの対応関係

サイズ	レモン 1 個の重さ
S	80 g 以上 90 g 未満
M	90 g 以上 110 g 未満
L	110 g 以上 140 g 未満
2L	140 g 以上 170 g 未満
その他	80 g 未満または 170 g 以上

(1)　Q 地域で今年収穫されるレモンの重さ (単位は g) は，過去に収穫されたレモンの重さと同じ分布に従うとする。すなわち，今年収穫される 1 個のレモンの重さを確率変数 X で表すと，X は正規分布 $N(110,\ 20^2)$ に従うとする。よって，今年収穫されるレモンから無作為にレモンを 1 個抽出するとき，そのレモンが L サイズである確率は，$P(110 \leqq X < 140) = P(110 \leqq X \leqq 140)$であることに注意すると，$0.\boxed{アイウエ}$ である。
いま，Q 地域で今年収穫されるレモンが 20 万個であるとし，その中の L サイズのレモンの個数を確率変数 Y で表すと，Y は二項分布に従い，Y の平均 (期待値) は $\boxed{オ}$ となる。

$\boxed{オ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑦ のうちから一つ選べ。

⓪　13100	①　13360	②　31740	③　68260
④　86640	⑤　100000	⑥　168260	⑦　186640

(2)　太郎さんと花子さんは，Q 地域で今年収穫されるレモンから何個かを抽出して，今年収穫されるレモンの重さの平均 (母平均) を推定する方法について話している。

太郎：母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 g 以下にして推定したいね。
花子：母標準偏差を過去と同じ 20 g とすると，何個のレモンの重さを量ればいいかな。
太郎：信頼区間の式から，必要な標本の大きさを求めてみようよ。

母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 g 以下にするために必要な標本の大きさを求める。いま，Q 地域で今年収穫されるレモン全体を母集団とし，その重さの母平均を m g，母標準偏差を σ g とする。この母集団から無作為に抽出した n 個のレモンの重さを確率変数 W_1，W_2，……，W_n で表すと，標本の大きさ n が十分に大きいとき，標本平均 $\overline{W}=\frac{1}{n}(W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n)$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \boxed{\text{カ}}\right)$ に従う。

また，m に対する信頼度 95 % の信頼区間を $A \leqq m \leqq B$ と表すと，信頼区間の幅は

$B-A=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{n}}$ となる。

したがって，母標準偏差を過去と同じ $\sigma=20$ として，n に関する不等式

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{n}} \leqq 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす自然数 n を求めればよい。① の両辺は正であるから，両辺を 2 乗して整理すると，$\left(\boxed{\text{キ}}\right)^2 \leqq 16n$ となる。この不等式を満たす最小の自然数 n を n_0 とすると，

$n_0=\boxed{\text{クケコ}}$ である。ゆえに，m に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 g 以下にするために必要な標本の大きさ n のうち，最小のものは $\boxed{\text{クケコ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ σ	① $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	② $\dfrac{\sqrt{\sigma}}{n}$	③ $\dfrac{\sigma}{n}$
④ σ^2	⑤ $\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$	⑥ $\dfrac{\sigma^2}{n}$	⑦ $\dfrac{\sigma^2}{n^2}$

$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ σ	① 1.65σ	② 1.96σ
③ 2σ	④ 3.3σ	⑤ 3.92σ

(3) 太郎さんと花子さんは，Q 地域で今年収穫されるレモンの重さについて話している。

太郎：今年のレモンの重さは，他の地域では例年よりも軽そうだと聞いたよ。
花子：Q 地域でも，過去の平均 110 g と比べて軽いのかな。
太郎：標本の大きさを 400，母標準偏差を過去と同じ 20 g として，仮説検定をしてみようよ。

(2) の m を用いて，Q 地域で今年収穫されるレモンの重さの母平均 m g が過去の平均 110 g より軽いといえるかを，有意水準 5 % (0.05) で仮説検定を行い検証したい。ただ

し，標本の大きさは 400，母標準偏差は過去と同じ 20 g とする。ここで，統計的に検証したい仮説を「対立仮説」，対立仮説に反する仮定として設けた仮説を「帰無仮説」とする。このとき，帰無仮説は「$m=110$」，対立仮説は「 サ 」である。これらの仮説に対して，有意水準 5 % で帰無仮説が棄却 (否定) されるかどうかを判断する。

いま，帰無仮説が正しいと仮定する。標本の大きさ 400 は十分に大きいので，(2) の標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 シ に従う。無作為抽出した 400 個のレモンの重さの平均が 108.2 g となった。このとき，確率 $P(\overline{W} \leqq 108.2)$ は 0. スセソタ となる。この値をパーセント表示した値は有意水準 5 % より チ 。したがって，有意水準 5 % で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽いと ツ 。

サ の解答群

⓪ $m<110$	① $m \leqq 110$	② $m=110$
③ $m \geqq 110$	④ $m>110$	

シ の解答群

⓪ $N(108.2,\ 400)$	① $N(108.2,\ 20)$	② $N(108.2,\ 1)$
③ $N(110,\ 400)$	④ $N(110,\ 20)$	⑤ $N(110,\ 1)$

チ の解答群

⓪ 小さいから，帰無仮説は棄却されない
① 小さいから，帰無仮説は棄却される
② 大きいから，帰無仮説は棄却されない
③ 大きいから，帰無仮説は棄却される

ツ の解答群

⓪ 判断できる	① 判断できない

2

α，β，γ を異なる複素数とし，複素数平面上に 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) をとる。直線 AB と直線 AC の関係について考えよう。

以下，複素数の偏角は 0 以上 2π 未満とする。

(1)　$\alpha=3+2i$，$\beta=7$，$\gamma=7+10i$ の場合を考える。$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角を求めよう。

$$\gamma-\alpha=\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}i$$

$$\beta-\alpha=\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}i$$

であるから

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{\text{オ}}$$

であり，$\boxed{\text{オ}}$ の偏角は $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪　i	①　$1+i$	②　2	③　$2i$
④　$-i$	⑤　$1-i$	⑥　-2	⑦　$-2i$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪　0	①　$\dfrac{\pi}{6}$	②　$\dfrac{\pi}{4}$	③　$\dfrac{\pi}{3}$
④　$\dfrac{\pi}{2}$	⑤　$\dfrac{3}{4}\pi$	⑥　π	⑦　$\dfrac{5}{4}\pi$
⑧　$\dfrac{3}{2}\pi$	⑨　$\dfrac{7}{4}\pi$		

(2)　$w=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおく。直線 AB と直線 AC が垂直に交わるのは，w の偏角が $\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$ のときである。このとき，w は $\boxed{\text{キ}}$ であるから

$$w+\overline{w}=\boxed{\text{ク}}$$

である。逆に，$w\fallingdotseq 0$ に注意すると，$w+\overline{w}=\boxed{\text{ク}}$ のとき，w は $\boxed{\text{キ}}$ であるので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わる。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪　0 でない実数	①　$1+i$　または　$1-i$
②　純虚数（実部が 0 である虚数）	③　$-1+i$　または　$-1-i$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ i
④ $2i$	⑤ -1	⑥ -2	⑦ $-i$

(3) z は 0，2，-2 でない複素数とする。

(i) $\alpha=z$，$\beta=2$，$\gamma=\dfrac{4}{z}$ とする。直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための条件について考えよう。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\frac{4}{z}-z}{2-z}=1+\frac{2}{z}$$

が成り立つので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1+\frac{2}{z}\right)+\overline{\left(1+\frac{2}{z}\right)}=\boxed{\text{ク}}$$

である。これは

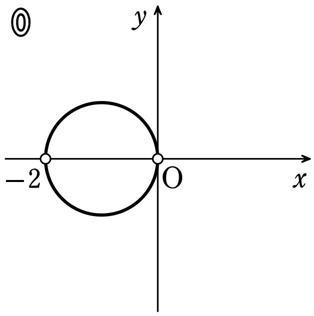
$$2+\frac{2}{z}+\frac{2}{\overline{z}}=\boxed{\text{ク}}$$

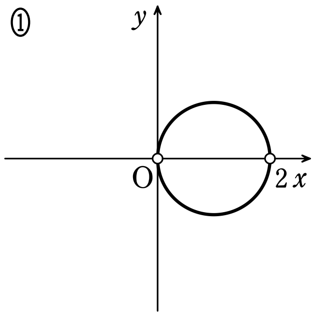
と変形できる。さらに，この両辺に $z\overline{z}$ をかけて整理すると，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は $\boxed{\text{ケ}}$ であることがわかる。したがって，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{\text{コ}}$ である。

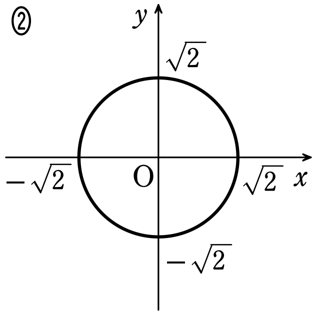
$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

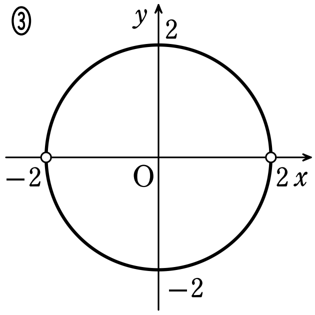
⓪ $\lvert z\rvert=\lvert z-4\rvert$	① $\lvert z\rvert=\lvert z-2\rvert$
② $\lvert z\rvert=\lvert z+4\rvert$	③ $\lvert z+1\rvert=\lvert z-1\rvert$
④ $\lvert z-1\rvert=1$	⑤ $\lvert z\rvert=2$
⑥ $\lvert z+1\rvert=1$	⑦ $\lvert z\rvert=\sqrt{2}$

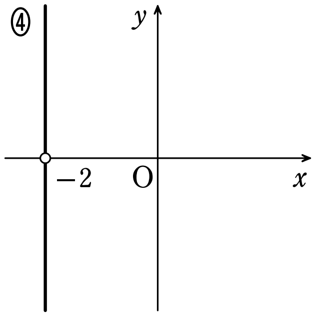
$\boxed{\text{コ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑦ のうちから一つ選べ。

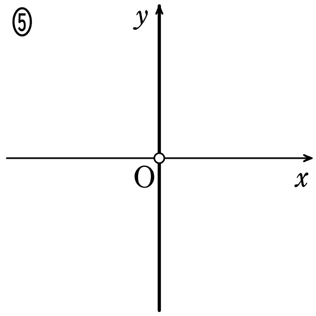
⓪


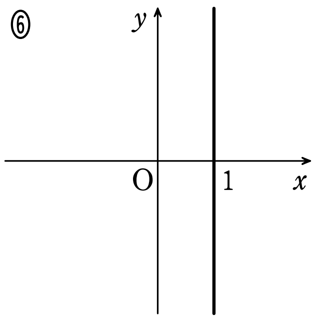
①


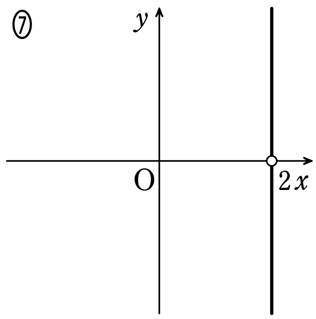
②


③


④


⑤


⑥


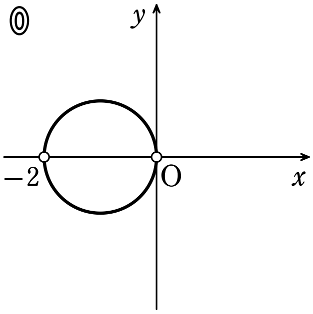
⑦


(ii)　(i) の α，β，γ をそれぞれ -1 倍した複素数 $\alpha' = -z$，$\beta' = -2$，$\gamma' = -\dfrac{4}{z}$ について考える。複素数平面上の異なる 3 点 $\mathrm{A}'(\alpha')$，$\mathrm{B}'(\beta')$，$\mathrm{C}'(\gamma')$ について，直線 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ と直線 $\mathrm{A}'\mathrm{C}'$ が垂直になるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{\text{サ}}$ である。

(iii)　(i) の α，β，γ における z を $-z$ に置き換え，$\alpha'' = -z$，$\beta'' = 2$，$\gamma'' = -\dfrac{4}{z}$ について考える。複素数平面上の異なる 3 点 $\mathrm{A}''(\alpha'')$，$\mathrm{B}''(\beta'')$，$\mathrm{C}''(\gamma'')$ について，直線 $\mathrm{A}''\mathrm{B}''$ と直線 $\mathrm{A}''\mathrm{C}''$ が垂直になるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\boxed{\text{シ}}$ である。

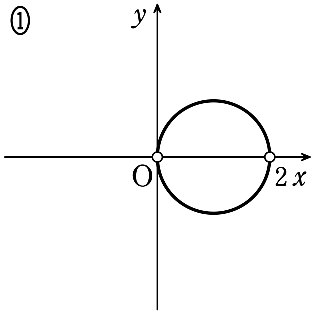
$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑦ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪



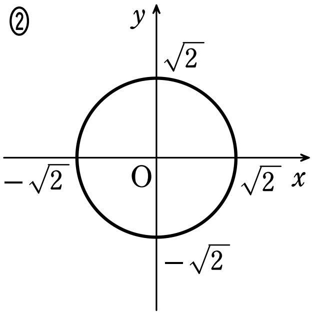
y
−2
O
x

①



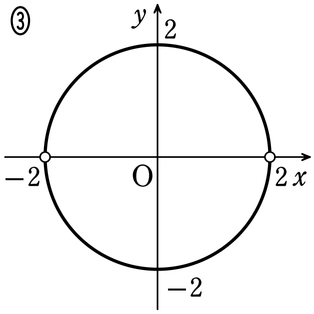
y
O
2
x

②



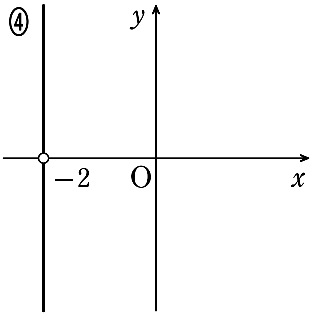
y
$\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$
O
$\sqrt{2}$
x
$-\sqrt{2}$

③



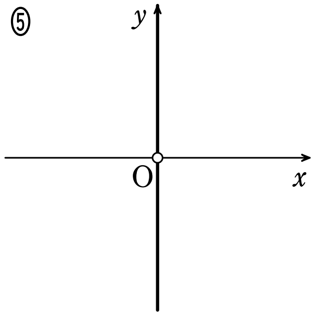
y
2
−2
O
2
x
−2

④



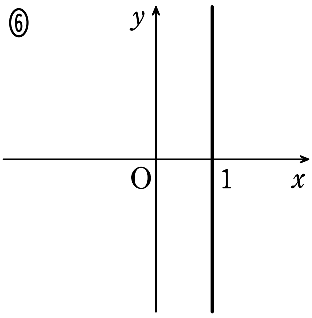
y
−2
O
x

⑤



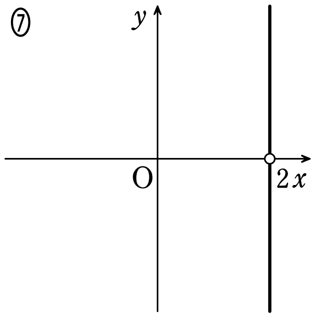
y
O
x

⑥



y
O
1
x

⑦



y
O
2
x

$\boxed{3}$

10 進法で表された数 6.75 を 2 進法で表せ。また，この数と 2 進法で表された数 101.0101 との積として与えられる数を 2 進法および 4 進法で表せ。

$\boxed{4}$

赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある。よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す。この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ。ただし n は 4 以上の整数とする。

$\boxed{5}$

xyz 空間の 3 点 A $(1,\ 0,\ 0)$，B $(0,\ -1,\ 0)$，C $(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面 α に関して点 P $(1,\ 1,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。ただし，点 Q が平面 α に関して P と対称であるとは，線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり，直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである。

$\boxed{6}$

m を実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2$ と直線 $y=mx+1$ の共有点を A，B とし，原点を O とする。

(1)　$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　3 点 A，B，O を通る円の方程式を求めよ。

(3)　放物線 $y=x^2$ と (2) の円が A，B，O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ。

$\boxed{7}$

空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある。s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とする。線分 OA を $1:1$ に内分する点を $\mathrm{A_0}$，線分 OB を $1:2$ に内分する点を $\mathrm{B_0}$，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。さらに 4 点 $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，P，Q が同一平面上にあるとする。

(1)　t を s を用いて表せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，$\angle \mathrm{AOB}=120^\circ$，$\angle \mathrm{BOC}=90^\circ$，$\angle \mathrm{COA}=60^\circ$，$\angle \mathrm{POQ}=90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ。