【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材①

中３六甲数学

【注意事項】

本教材は

数学１「軌跡と領域」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

座標平面上に 2 点 A$(3,\ 4)$，B$(-2,\ -6)$ および円 C ：$x^2-2x+y^2+4y-12=0$がある。円 C の周上を動く点 P を考える。△ABP の重心の軌跡を求めよ。

$\boxed{2}$

方程式 $x^2+y^2-4kx+(6k-2)y+14k^2-8k+1=0$ が円を表すとき

(1)　定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　k の値がこの範囲で変化するとき，円の中心の軌跡を求めよ。

$\boxed{3}$

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=m(x-1)$ は異なる 2 点 P，Q で交わっている。

(1)　定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　m の値が変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

$\boxed{4}$

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$|x+2y|\leqq 6$　　(2)　$|x|+|y+1|\leqq 2$

$\boxed{5}$

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$(x+y-2)(y-x^2)>0$　　(2)　$(x^2+y^2-4)(x^2+y^2+4x-5)\leqq 0$

$\boxed{6}$

$x^2+y^2\leqq 1$，$x\geqq 0$ のとき，$-2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{7}$

座標平面上の点 P$(x,\ y)$ が $3y\leqq x+11$，$x+y-5\geqq 0$，$y\geqq 3x-7$ の範囲を動くとき，x^2+y^2-4y の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{8}$

a がすべての実数値をとって変化するとき，直線

$$y=2ax-a^2+1 \quad \cdots\cdots ①$$

が通りうる点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

$\boxed{9}$

次の直線の方程式を求めよ。

(1)　2 直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ のなす角の二等分線

(2)　直線 ℓ ：$x-y+1=0$ に関して直線 $2x+y-2=0$ と対称な直線

$\boxed{10}$

長さが 2 の線分 AB を 1 辺とする三角形 PAB の頂点 P が，等式 $\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=2$ を満たしながら動くとき，点 P の軌跡を求めよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　円 $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{17}{9}$　ただし，2 点 $\left(-\dfrac{1}{5},\ -\dfrac{12}{5}\right)$，$(1,\ 0)$ は除く

$\boxed{2}$

解答　(1)　$0<k<2$　　(2)　直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ $(0<x<4)$

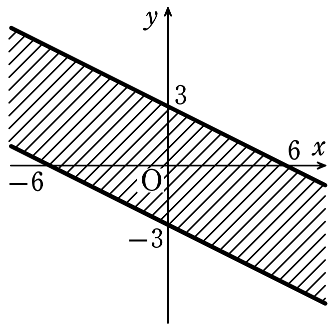
$\boxed{3}$

解答　(1)　$m<0$，$4<m$　　(2)　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0$，$2<x$ の部分

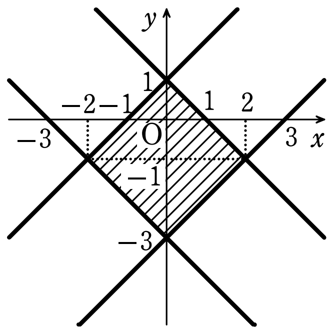
$\boxed{4}$

解答　(1)　〔図〕境界線を含む　　(2)　〔図〕境界線を含む

(1)



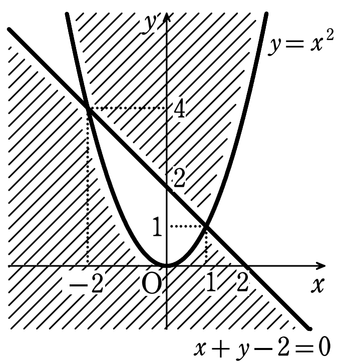
(2)



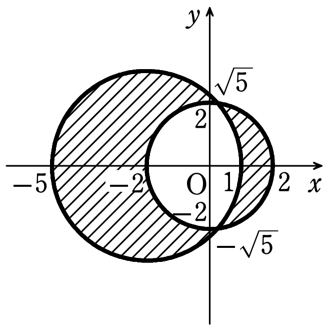
$\boxed{5}$

解答　(1)　〔図〕境界線を含まない　　(2)　〔図〕境界線を含む

(1)



(2)



$\boxed{6}$

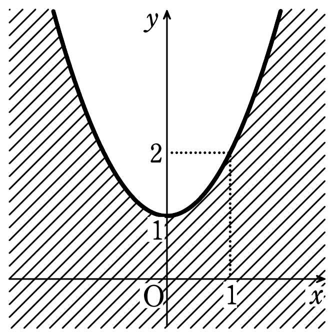
解答　$x=0$，$y=1$ のとき最大値 1，　$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$y=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$

$\boxed{7}$

解答　$x=4$，$y=5$ のとき最大値 21；$x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{7}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$

$\boxed{8}$

解答　〔図〕境界線を含む



$\boxed{9}$

解答　(1)　$4x-2y-11=0$，$4x+8y-5=0$　　(2)　$x+2y-3=0$

$\boxed{10}$

解答　線分 AB を 3：1 に内分する点を C とすると，点 C を通り直線 AB に垂直な直線。ただし，点 C は除く

$\boxed{1}$

解説

直線 AB の方程式は　$y-4=\dfrac{-6-4}{-2-3}(x-3)$　すなわち　$y=2x-2$　……①

円 C の方程式を変形すると　$(x-1)^2+(y+2)^2=17$　……②

点 P の座標を $(s,\ t)$ とする。

3 点 A，B，P が同じ直線上にないとき，△ABP の重心 G の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{3-2+s}{3},\quad y=\frac{4-6+t}{3}$$

すなわち　$x=\dfrac{s+1}{3}$，$y=\dfrac{t-2}{3}$　…… ③

点 P は円 C の周上を動くから，② より

$$(s-1)^2+(t+2)^2=17 \quad \cdots\cdots ④$$

③ から　$s=3x-1$，$t=3y+2$

④ に代入して　$(3x-2)^2+(3y+4)^2=17$

したがって　$\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{17}{9}$

3 点 A，B，P が同じ直線上にあるとき，点 P は直線 AB と円 C の交点である。

①，② から　$5x^2-2x-16=0$

ゆえに　$(5x+8)(x-2)=0$　　よって　$x=-\dfrac{8}{5}$，2

したがって，直線 AB と円 C の交点となるような点 P $(s,\ t)$ は，

① から　$(s,\ t)=\left(-\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{26}{5}\right)$，$(2,\ 2)$

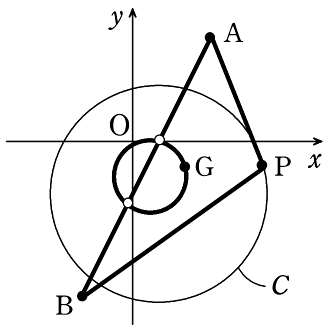
このとき，③ から，それぞれ

$$(x,\ y)=\left(-\dfrac{1}{5},\ -\dfrac{12}{5}\right),\ (1,\ 0)$$

この 2 点は，求める軌跡から除くことになる。

以上から，求める軌跡は，円 $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{17}{9}$

ただし，2 点 $\left(-\dfrac{1}{5},\ -\dfrac{12}{5}\right)$，$(1,\ 0)$ は除く。



$\boxed{2}$

(解説)

(1)　方程式を変形して

$$(x-2k)^2+\{y+(3k-1)\}^2=-k^2+2k$$

これが円を表すための条件は　$-k^2+2k>0$

よって　$k(k-2)<0$　　したがって　$0<k<2$

(2)　円の中心の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=2k,\ y=-3k+1\ (0<k<2)$$

k を消去すると　$y=-\dfrac{3}{2}x+1$

また，$0<k<2$ であるから　$0<2k<4$　すなわち　$0<x<4$

よって，求める軌跡は　直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ $(0<x<4)$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$y=x^2$ …… ①，　$y=m(x-1)$ …… ②　とする。

①，② から y を消去して整理すると　$x^2-mx+m=0$　…… ③

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-m)^2-4m=m(m-4)$$

放物線 ① と直線 ② が異なる 2 点 P，Q で交わるための必要十分条件は

$D>0$　すなわち　$m(m-4)>0$

よって　$m<0$，$4<m$　…… ④

(2)　P，Q の x 座標を，それぞれ α，β $(\alpha \neq \beta)$ とする。

α，β は ③ の異なる 2 つの実数解であるから，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=m$

線分 PQ の中点 M の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m}{2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$Y=m(X-1) \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤ から　$m=2X$　…… ⑦

これを ⑥ に代入して　$Y=2X(X-1)$　　よって　$Y=2X^2-2X$

また，④，⑦ から　$2X<0$，$4<2X$　　ゆえに　$X<0$，$2<X$

よって，点 M は放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0$，$2<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

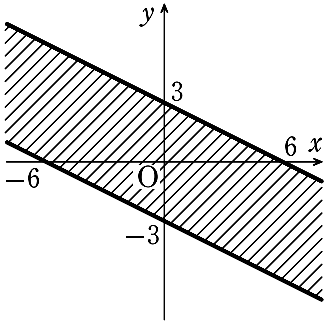
したがって，点 M の軌跡は　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0$，$2<x$ の部分

$\boxed{4}$

(解説)

(1) $|x+2y|\leqq 6$ から　　$-6\leqq x+2y\leqq 6$

よって　$\begin{cases}-6\leqq x+2y\\ x+2y\leqq 6\end{cases}$　すなわち　$\begin{cases}y\geqq -\dfrac{1}{2}x-3\\ y\leqq -\dfrac{1}{2}x+3\end{cases}$



求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。

(2) [1]　$x\geqq 0$，$y\geqq -1$ のとき

$x+y+1\leqq 2$　すなわち　$y\leqq -x+1$

[2]　$x\geqq 0$，$y<-1$ のとき

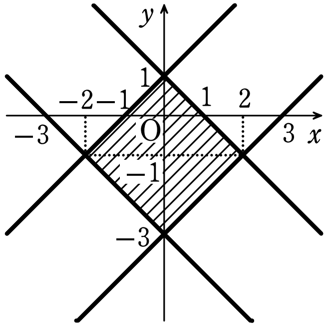
$x-(y+1)\leqq 2$　すなわち　$y\geqq x-3$

[3]　$x<0$，$y\geqq -1$ のとき

$-x+y+1\leqq 2$　すなわち　$y\leqq x+1$

[4]　$x<0$，$y<-1$ のとき

$-x-(y+1)\leqq 2$　すなわち　$y\geqq -x-3$



求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。

$\boxed{5}$

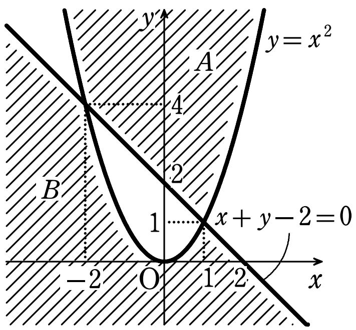
(解説)

(1)　与えられた不等式から

①　$\begin{cases}x+y-2>0\\ y-x^2>0\end{cases}$　または　②　$\begin{cases}x+y-2<0\\ y-x^2<0\end{cases}$

求める領域は，① の表す領域 A と，② の表す領域 B の和集合 $A\cup B$ で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



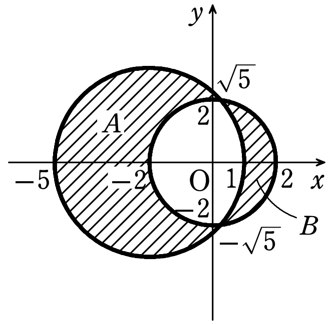
(2)　与えられた不等式を変形すると

$$(x^2+y^2-4)\{(x+2)^2+y^2-9\}\leqq 0$$

よって

①　$\begin{cases}x^2+y^2-4\geqq 0\\ (x+2)^2+y^2-9\leqq 0\end{cases}$　または

②　$\begin{cases}x^2+y^2-4\leqq 0\\ (x+2)^2+y^2-9\geqq 0\end{cases}$



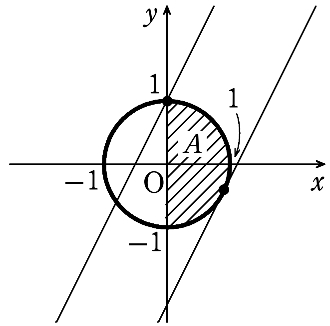
求める領域は，① の表す領域 A と，② の表す領域 B の和集合 $A\cup B$ で，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。

$\boxed{6}$

(解説)

与えられた連立不等式の表す領域 A は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$-2x+y=k$ ……①　とおくと，① は傾きが 2，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線 ① が点 $(0,\ 1)$ を通るとき，k の値は最大となる。

このとき　　$k=-2\cdot 0+1=1$

また，直線 ① が領域 A 上で円 $x^2+y^2=1$ に接するとき，k の値は最小となる。

① から　　$y=2x+k$　……②

これを $x^2+y^2=1$ に代入して　　$x^2+(2x+k)^2=1$

よって　　$5x^2+4kx+k^2-1=0$　……③

この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-1)=-k^2+5$

直線 ① と円が接するとき，$D=0$ であるから　　$-k^2+5=0$

ゆえに　　$k=\pm\sqrt{5}$　　　接点が領域 A 上にあるとき　　$k=-\sqrt{5}$

このとき，③ から　　$x=-\dfrac{2k}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

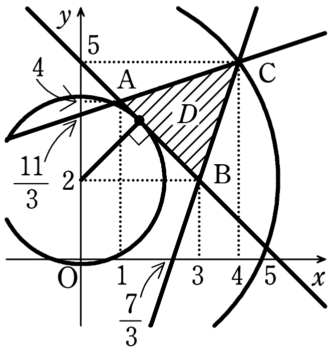
② から　　$y=2\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+k=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

よって　　$x=0$，$y=1$ のとき最大値 1，　$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$y=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-\sqrt{5}$

7

(解説)

与えられた連立不等式の表す領域 D は，3 点 A$(1,\ 4)$，B$(3,\ 2)$，C$(4,\ 5)$ を頂点とする三角形の周および内部である。



$x^2+y^2-4y=k$ とおくと

$x^2+(y-2)^2=k+4$　…… ①

$k+4>0$ のとき，① は点 $(0,\ 2)$ を中心とする半径 $\sqrt{k+4}$ の円を表す。この円 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から，円 ① が C$(4,\ 5)$ を通るとき，k は最大で

$$k=4^2+(5-2)^2-4=21$$

また，図から 円 ① が直線 AB：$x+y-5=0$　…… ② に接するとき，k が最小になる。

接点の座標は，円 ① の中心 $(0,\ 2)$ を通り直線 ② に垂直な直線 $y=x+2$ と直線 ② の交点であるから　$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

円 ① がこの点を通るとき，k は最小で

$$k=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}-2\right)^2-4=\frac{1}{2}$$

したがって　$x=4$，$y=5$ のとき最大値 21，

$x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{7}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$

8

(解説)

① を a について整理すると　　$a^2-2xa+y-1=0$　…… ②

直線 ① が点 $(x,\ y)$ を通るための必要十分条件は，② を満たす実数 a が存在することである。

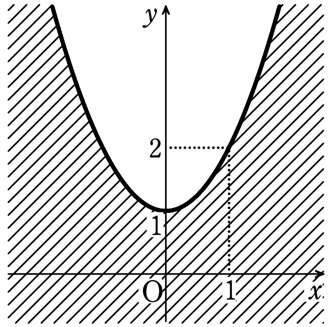
よって，a の 2 次方程式 ② の判別式 D について

$$D\geqq 0$$

ここで　　$\dfrac{D}{4}=(-x)^2-(y-1)=x^2-y+1$

ゆえに　　$x^2-y+1\geqq 0$　　　よって　　$y\leqq x^2+1$

したがって，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



9

(解説)

(1)　求める二等分線上の点 P$(x,\ y)$ は，2 直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ から等距離にある。

ゆえに　　$\dfrac{|4x+3y-8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|0\cdot x+5y+3|}{\sqrt{0^2+5^2}}$

よって　　$4x+3y-8=\pm(5y+3)$

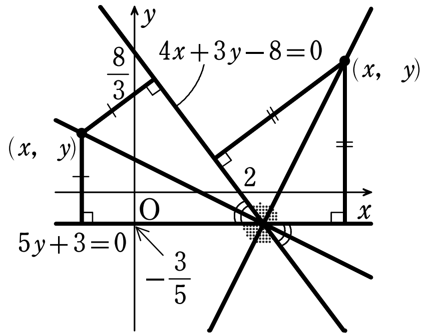
したがって，求める二等分線の方程式は

$4x+3y-8=5y+3$ から

$4x-2y-11=0$

$4x+3y-8=-5y-3$ から

$4x+8y-5=0$



(2)　直線 $2x+y-2=0$ 上の動点を Q$(s,\ t)$ とし，直線 ℓ に関して Q と対称な点を P$(x,\ y)$ とする。

直線 PQ は ℓ に垂直であるから　$\dfrac{t-y}{s-x}\cdot 1=-1$

よって　　$s+t=x+y$　　　…… ①

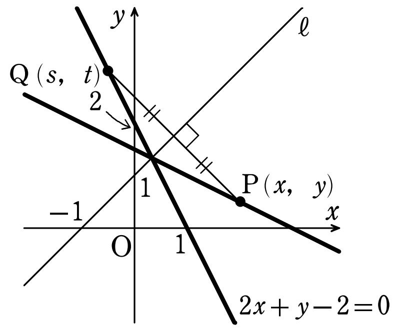
線分 PQ の中点は直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{x+s}{2}-\frac{y+t}{2}+1=0$$

よって　　$s-t=-x+y-2$　…… ②

①，② から　　$s=y-1$，$t=x+1$

Q は直線 $2x+y-2=0$ 上を動くから　　$2s+t-2=0$



これに $s=y-1$，$t=x+1$ を代入して，求める直線の方程式は

$$2(y-1)+(x+1)-2=0 \quad \text{すなわち} \quad x+2y-3=0$$

$\boxed{10}$

（解説）

A(0，0)，B(2，0) となるように，座標軸を定める。

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

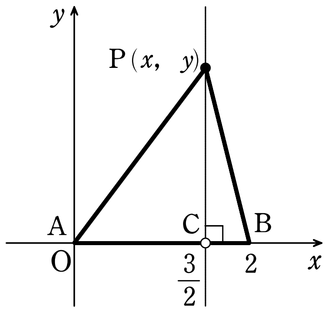
$$AP^2=x^2+y^2$$

$$BP^2=(x-2)^2+y^2$$

$AP^2-BP^2=2$ から　$x^2+y^2-\{(x-2)^2+y^2\}=2$

整理して　$4x=6$

ゆえに　$x=\dfrac{3}{2}$ …… ①



ここで，P は △PAB の頂点であるから，直線 AB 上にはない。

よって，直線 ① から，x 軸上の点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を除く。

したがって，求める軌跡は，線分 AB を 3：1 に内分する点を C とすると，点 C を通り直線 AB に垂直な直線。ただし，点 C は除く。