$\boxed{1}$

(解説)

(1)　(i)　$\alpha=\beta$ のとき，$\alpha=\theta+\frac{\pi}{6}$，$\beta=2\theta$ より

$$\theta+\frac{\pi}{6}=2\theta \quad \text{よって} \quad \theta=\frac{\pi}{{}^{\text{ア}}6}$$

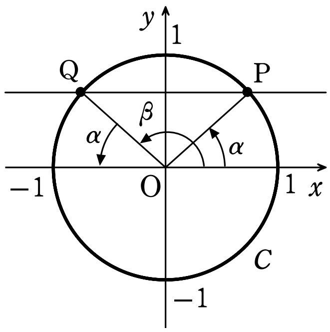
また，$\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{{}^{\text{イ}}3}}{{}^{\text{ウ}}2}$

(ii)　$\sin\alpha$ は点Pの $y$ 座標，$\sin\beta$ は点Qの $y$ 座標であるから，$\sin\alpha=\sin\beta$ が成り立つとき，つねに点Pの $y$ 座標と点Qの $y$ 座標が等しい。$\left({}^{\text{エ}}\ ②\right)$

(iii)　(ii) と同様の点Pと点Qについて考える。

[1]　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$\frac{\pi}{6}\leqq\alpha\leqq\frac{2}{3}\pi$ かつ $0\leqq\beta\leqq\pi$ かつ $\theta\fallingdotseq\frac{\pi}{6}$ であることから，② が成り立つ，すなわち点Pの $y$ 座標と点Qの $y$ 座標が等しくなるのは，右の図のように，$\alpha+\beta=\pi$ が成り立つときである。$\left({}^{\text{オ}}\ ②\right)$

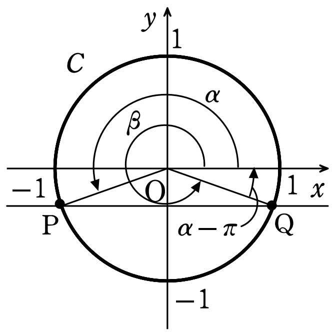



これより　$\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\theta=\pi$

よって，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のときの ① の解は　$\theta=\frac{{}^{\text{カ}}5}{{}^{\text{キク}}18}\pi$

[2]　$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

$\frac{2}{3}\pi<\alpha<\frac{7}{6}\pi$ かつ $\pi<\beta<2\pi$ かつ $\theta\fallingdotseq\frac{\pi}{6}$ であることから，② が成り立つ，すなわち点Pの $y$ 座標と点Qの $y$ 座標が等しくなるのは，右の図のように，$(\alpha-\pi)+\beta=2\pi$，すなわち $\alpha+\beta=3\pi$ が成り立つときである。$\left({}^{\text{ケ}}\ ⑥\right)$




これより　$\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\theta=3\pi$

よって，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のときの ① の解は　$\theta=\frac{{}^{\text{コサ}}17}{{}^{\text{シス}}18}\pi$

(2)　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2\theta$　…… ③ とおく。(1) の $\alpha$，$\beta$ を用いれば，③ は

$\cos\alpha=\cos\beta$　…… ④ と表せる。

ここで，$\alpha=\beta$ を満たす $\theta$ は $\theta+\frac{\pi}{6}=2\theta$ から　$\theta=\frac{\pi}{6}$

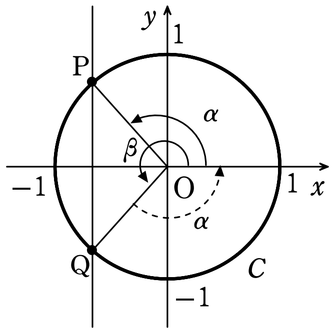
$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ を除く ③ の解について考える。(1) の (ii) と同様に考えれば，④ が成り立つとき，つねに点 P の $x$ 座標と点 Q の $x$ 座標は等しい。したがって，$\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{6}$ として，点 P の $x$ 座標と点 Q の $x$ 座標が等しくなるような $\theta$ の値を考えればよい。

[1]　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \alpha \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ かつ $0 \leqq \beta \leqq \pi$ かつ $\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{6}$ であるから，点 P および 点 Q は第 1 象限または第 2 象限にあり，この範囲で点 P の $x$ 座標と点 Q の $x$ 座標が等しくなることはない。

[2]　$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$\dfrac{2}{3}\pi < \alpha < \dfrac{7}{6}\pi$ かつ $\pi < \beta < 2\pi$ かつ $\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{6}$ であることから，④ が成り立つ，すなわち点 P の $x$ 座標と点 Q の $x$ 座標が等しくなるのは，右の図のように，$\alpha$ が第 2 象限の角，$\beta$ が第 3 象限の角のときで，$\alpha+\beta=2\pi$ が成り立つときである。




これより　$\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\theta=2\pi$

よって，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のときの ③ の解は　$\theta=\dfrac{11}{18}\pi$

[1]，[2] を含む以上の考察から，$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，③ の解は　$\theta=\dfrac{\pi}{{}^{\text{セ}}6}$，$\dfrac{{}^{\text{ソタ}}11}{{}^{\text{チツ}}18}\pi$

参考　三角関数の和と積の公式により，③ は以下のように解くこともできる。

$$\cos 2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$-2\sin\left(\frac{3}{2}\theta+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{12}\right)=0$$

$0 \leqq \theta < \pi$ より，$\dfrac{\pi}{12} \leqq \dfrac{3}{2}\theta+\dfrac{\pi}{12} < \dfrac{19}{12}\pi$，$-\dfrac{\pi}{12} \leqq \dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{\pi}{12} < \dfrac{5}{12}\pi$ であるから

$$\frac{3}{2}\theta+\frac{\pi}{12}=\pi \text{ または } \frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{12}=0$$

よって　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{11}{18}\pi$

## 2

解説

(1)　$r$ は 1 日ごとの水草 A の量の増加する倍率であるから，水草 A の量は，1 日目の正午には 0 日目の正午の $r$ 倍，2 日目の正午には $r^2$ 倍，3 日目の正午には $r^3$ 倍となる。観測結果から，3 日目の正午の水草 A の量は 0 日目の正午の 1.32 倍であるから，$r$ は $r^3=1.32$ を満たす。（ア ③）

この式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} r^3 = \log_{10} 1.32$$

常用対数表より，$\log_{10} 1.32 = 0.1206$ ($^{イ}$ ①) であるから

$$3\log_{10} r = 0.1206$$

よって　$\log_{10} r = 0.{}^{ウエオカ}0402$

(2)　水草 A の量は，14 日目の正午には，0 日目の正午の量の $r^{14}$ 倍，すなわち $a$ の $r^{14}$ 倍となる。($^{キ}$ ③)

いま，0 日目の正午に $a$ %だった水草 A の量が，14 日目の正午に 60 % となることから　$a \times r^{14} = {}^{クケ}60$　…… ①

① の両辺の常用対数をとり，(1) で求めた $\log_{10} r = 0.0402$ と $\log_{10} 6 = 0.7782$ であることを用いると，

$$\log_{10}(a \times r^{14}) = \log_{10} 60$$

$$\log_{10} a + 14\log_{10} r = \log_{10} 6 + \log_{10} 10$$

$$\log_{10} a = \log_{10} 6 + 1 - 14\log_{10} r$$

$$\log_{10} a = 0.7782 + 1 - 14 \times 0.0402$$

$$\log_{10} a = 1.2154 \quad ({}^{コ}③)$$

また，$\log_{10} a = 0.2154 + 1$ であって，常用対数表より，$\log_{10} 1.64 = 0.2148$，$\log_{10} 1.65 = 0.2175$ であるから

$$\log_{10} 1.64 + 1 < \log_{10} a < \log_{10} 1.65 + 1$$

$$\log_{10} 16.4 < \log_{10} a < \log_{10} 16.5$$

底 10 は 1 より大きいから　$16.4 < a < 16.5$

したがって，$a$ 以下の最大の整数は　${}^{サシ}16$

## $\boxed{3}$

解説

(1)　$\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ -1)$

$\overrightarrow{AP} = (s+4,\ t+1,\ -2s+t-1)$

3 点 A，B，P が一直線上にあるとすると，$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 $k$ が存在する。

$$\begin{cases} s+4=k & \cdots\cdots ① \\ t+1=k & \cdots\cdots ② \\ -2s+t-1=-k & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①−② から　$s-t+3=0$

よって　$s-t=-3$　…… ①′

②+③ から　$-2s+2t=0$

よって　$s=t$　…… ②′

①′，②′ は同時に成り立たないから，①，②，③ を同時に満たす実数 $s$，$t$，$k$ は存在しない。

よって，3 点 A，B，P は一直線上にない。

(2)　点 H は直線 AB 上にあるから，実数 $u$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=0$$

$$u|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$ であるから

$$3u-\{(s+4)+(t+1)-(-2s+t-1)\}=0$$

整理して　　$u=s+2$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

$$=(-4,\ -1,\ 0)+(s+2,\ s+2,\ -s-2)$$

$$=(s-2,\ s+1,\ -s-2)$$

したがって，点 H の座標は　　$(s-2,\ s+1,\ -s-2)$

(3)　　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(-2,\ s-t+1,\ s-t-1)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\sqrt{(-2)^2+(s-t+1)^2+(s-t-1)^2}$$

$$=\sqrt{2(s-t)^2+6}$$

$(s-t)^2\geqq 0$ より　　$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|\geqq\sqrt{6}$

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$$

$$\geqq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

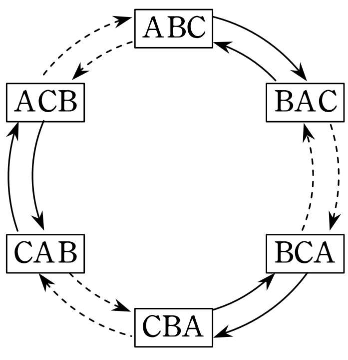
よって，三角形 ABP の面積の最小値は　　$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

## $\boxed{4}$

解説

(1)　A，B，C の 3 文字を 1 個ずつ並べて得られる文字列に対して，コインを投げたあとの文字列は，右の図のように変化する。

ただし，右の図において，$\longrightarrow$ は表，$\dashrightarrow$ は裏が出た場合の操作を表す。




最初の文字列は ABC であるから，コインを $n$ 回投げたあとの文字列は

　$n$ が偶数のとき，ABC，BCA，CAB のいずれか

　$n$ が奇数のとき，BAC，CBA，ACB のいずれか

である。

よって，コインを $2k+2$ 回続けて投げたあとの文字列が ABC であるのは次の場合である。

[1]　コインを $2k$ 回続けて投げたあとの文字列が ABC で，その後の 2 回で，表が 2 回

または裏が2回出る

[2]　コインを $2k$ 回続けて投げたあとの文字列が BCA で，その後の2回で，裏と表がこの順で出る

[3]　コインを $2k$ 回続けて投げたあとの文字列が CAB で，その後の2回で，表と裏がこの順で出る

コインを $2k$ 回続けて投げたあとの文字列が CAB である確率は $1-(p_{2k}+q_{2k})$ であるから，[1] ～ [3] より

$$p_{2k+2}=p_{2k}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+q_{2k}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\{1-(p_{2k}+q_{2k})\}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}p_{2k}+\frac{1}{4}$$

したがって　$p_{2k+2}=\frac{1}{4}p_{2k}+\frac{1}{4}$　…… ①

同様にして　$q_{2k+2}=\frac{1}{4}q_{2k}+\frac{1}{4}$　…… ②

① − ② より　$p_{2k+2}-q_{2k+2}=\frac{1}{4}(p_{2k}-q_{2k})$

また，$p_2$，$q_2$ を求めると　$p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，　$q_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

よって，数列 $\{p_{2k}-q_{2k}\}$ は，初項 $p_2-q_2=\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$p_{2k}-q_{2k}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

(2)　[1]　$n$ が偶数，すなわち $n=2k$ と表されるとき

① を変形すると　$p_{2k+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(p_{2k}-\frac{1}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{p_{2k}-\frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $p_2-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$p_{2k}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

したがって　$p_{2k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$

よって，$n$ が偶数のとき　$p_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

[2]　$n$ が奇数のとき，文字列が ABC になることはないから　$p_n=0$

[1]，[2] より

$$p_n=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (n\text{ は偶数})\\ 0 & (n\text{ は奇数})\end{cases}$$

$\boxed{\text{別解}}$　($p_{2k}$ の求め方)

① + ② より　$p_{2k+2}+q_{2k+2}=\frac{1}{4}(p_{2k}+q_{2k})+\frac{1}{2}$

変形して　$p_{2k+2}+q_{2k+2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(p_{2k}+q_{2k}-\frac{2}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{p_{2k}+q_{2k}-\frac{2}{3}\right\}$ は，初項 $p_2+q_2-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列で

$$p_{2k}+q_{2k}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

すなわち　$p_{2k}+q_{2k}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

これと $p_{2k}-q_{2k}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$ の両辺を足して　$2p_{2k}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

よって　$p_{2k}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k-1}$

## $\boxed{5}$

(解説)

$$n^4+6n^2+23=(n^2-n+4)(n^2+n+3)-n+11$$

よって，$n^4+6n^2+23$ が $n^2+n+3$ で割り切れるための必要十分条件は，

$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}=k$ …… ① となる整数 $k$ が存在することである。

[1]　$k=0$ のとき

① より，$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}=0$ であるから　$n=11$

[2]　$k\neq 0$ のとき

$k$ は整数であるから，① より

$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}\geqq 1$　または　$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}\leqq -1$

$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}\geqq 1$ のとき，$n^2+n+3>0$ から　$-n+11\geqq n^2+n+3$

よって　$n^2+2n-8\leqq 0$

ゆえに　$(n-2)(n+4)\leqq 0$

よって　$-4\leqq n\leqq 2$

これを満たす正の整数 $n$ は　$n=1$，$2$

$n=1$ のとき　$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}=\dfrac{10}{5}=2$

ゆえに，① を満たす。

$n=2$ のとき　$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}=\dfrac{9}{9}=1$

よって，① を満たす。

$\dfrac{-n+11}{n^2+n+3}\leqq -1$ のとき，$n^2+n+3>0$ から　$-n+11\leqq -(n^2+n+3)$

ゆえに　$n^2+14\leqq 0$

これを満たす正の整数 $n$ は存在しない。

よって，不適。

[1]，[2] から　$n=1$，$2$，$11$

$\boxed{6}$

(解説)

$9z^2$ は3の倍数であるから，$x^6+y^4$ すなわち $(x^3)^2+(y^2)^2$ も3の倍数 …… ① である。

このとき，$x^3$，$y^2$ が3の倍数であるかを考える。

整数 $n$ について，$n^2$ を3で割ったときの余りを調べる。

$k$ を整数として

$n=3k$ のとき　　　$n^2=9k^2=3\cdot 3k^2$

$n=3k+1$ のとき　　$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$n=3k+2$ のとき　　$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

よって，$n$ が3の倍数であるときは，$n^2$ を3で割った余りは0，$n$ が3の倍数でないときは，$n^2$ を3で割った余りは1である。

ここで，$x^3$，$y^2$ の少なくとも一方が3の倍数でないと仮定する。

[1]　$x^3$，$y^2$ がともに3の倍数でないとき

$(x^3)^2+(y^2)^2$ を3で割った余りは　　$1+1=2$

これは，① に矛盾する。

[2]　$x^3$，$y^2$ の一方が3の倍数であり，もう一方が3の倍数でないとき

$(x^3)^2+(y^2)^2$ を3で割った余りは　　$0+1=1$

これは，① に矛盾する。

[1]，[2] から，$x^3$，$y^2$ はともに3の倍数である。

ゆえに，$x$，$y$ は3の倍数であるから，正の整数 $a$，$b$ を用いて

$$x=3a,\quad y=3b$$

と表される。

このとき　　$9z^2=(3a)^6+(3b)^4$

よって　　$z^2=3^4a^6+3^2b^4=3(3^3a^6+3b^4)$　…… ②

ゆえに，$z^2$ は3の倍数であるから，$z$ も3の倍数である。

よって，$z$ は正の整数 $c$ を用いて，$z=3c$ と表されるから，② より

$$(3c)^2=3^4a^6+3^2b^4$$

ゆえに　　$c^2=3^2a^6+b^4$　…… ③

ここで，$N$ が最小となるのは，$c$ が最小となるときである。

$(a,\ b)=(1,\ 1)$ のとき　　$c^2=3^2\cdot 1^6+1^4=10$

これを満たす正の整数 $c$ は存在しない。

よって，不適。

$(a,\ b)=(1,\ 2)$ のとき　　$c^2=3^2\cdot 1^6+2^4=25$

$c$ は正の整数であるから　　$c=5$

$a\geqq 2$，$b\geqq 1$ のとき　　$c^2=3^2a^6+b^4\geqq 3^2\cdot 2^6+1^4=577>25$

ゆえに，③ を満たす正の整数 $c$ の最小の値は　$c=5$

したがって，求める $N$ の最小値は　　$N=9z^2=9(3c)^2=9(3\cdot 5)^2=2025$