1

放物線 $y=x^2-3x+4$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 4)$ を通り，その頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるような２次関数を求めよ。

2

x の方程式 $(m+1)x^2+2(m-1)x+2m-5=0$ の実数解の個数を求めよ。

3

不等式 $2x^4-5x^2+2>0$ を解け。

4

関数 $y=-x^2+2lx-l^2-2l-1$ $(-1\leqq x\leqq 0)$ の最大値が０になるような定数 l の値を求めよ。

5

すべての実数 x に対して，不等式 $a(x^2+x-1)<x^2+x$ が成り立つような，定数 a の値の範囲を求めよ。

6

x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$2x^2+2y-1$ の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

7

実数 x，y が $x^2-2xy+2y^2=2$ を満たすとき

(1)　x のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$2x+y$ のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

8

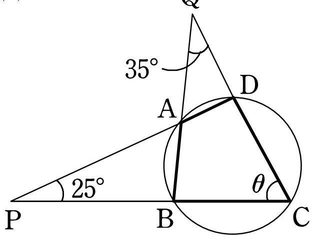
２次関数 $y=-x^2+(m-10)x-m-14$ のグラフが次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　x 軸の正の部分と負の部分で交わる。　(2)　x 軸の負の部分とのみ共有点をもつ。

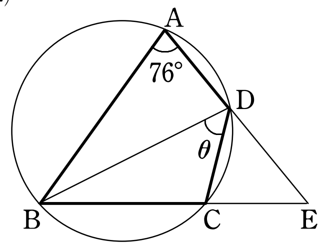
9

右の図で，四角形 ABCD は円に内接している。角 θ を求めよ。
ただし，(2) では AD＝DC，AB＝AE である。

(1)



(2)

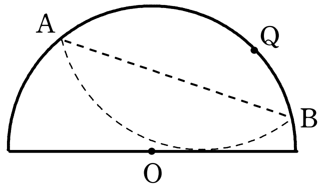


10

鋭角三角形 ABC の頂点 A から BC に下ろした垂線を AD とし，D から AB，ACに下ろした垂線をそれぞれ DE，DF とするとき，４点 B，C，F，E は１つの円周上にあることを，方べきの定理の逆を用いて証明せよ。また，方べきの定理を用いずに証明する方法も考えよ。

11

図のような半円を，弦を折り目として折る。このとき，折られた弧の上の点 Q において，折られた弧が直径に接するような折り目の線分を作図せよ (作図の方法だけ答えよ)。



$\boxed{12}$

(1)　$xy=2x+4y-5$ を満たす正の整数 x，y の組をすべて求めよ。

(2)　$\sqrt{4n^2+21}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{13}$

n が自然数のとき，n^6+1 は 3 で割り切れないことを証明せよ。

$\boxed{14}$

方程式 $37x-90y=4$ の整数解をすべて求めよ。

$\boxed{15}$

等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ $(4\leqq x<y<z)$を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$\boxed{16}$

平面 α とその上にない点 A があり，また，α 上に直線 ℓ と ℓ 上にない点 O があるとする。ℓ 上の 1 点を B とするとき，次のことが成り立つことを証明せよ。

(1)　$\mathrm{OA}\perp\alpha$，$\mathrm{AB}\perp\ell$　ならば　$\mathrm{OB}\perp\ell$

(2)　$\mathrm{OA}\perp\alpha$，$\mathrm{OB}\perp\ell$　ならば　$\mathrm{AB}\perp\ell$

$\boxed{17}$

(1)　5 進法で表すと 3 桁となるような自然数 N は何個あるか。

(2)　4 進法で 表すと 20 桁となる自然数 N を，2 進法，8 進法で表すと，それぞれ何桁の数になるか。

$\boxed{18}$

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2+2ax+25$，$g(x)=-x^2+4ax-25$ がある。次の条件が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$ が成り立つ。

(2)　ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

$\boxed{19}$

$f(x)=x^2-2x+3$，$g(x)=-x^2+6x+a^2+a-9$ がある。次の条件が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　$0\leqq x\leqq 4$ を満たすすべての実数 x_1，x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

(2)　$0\leqq x\leqq 4$ を満たすある実数 x_1，x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

$\boxed{1}$

解答　$y=(x-1)^2+3$　$(y=x^2-2x+4)$

$\boxed{2}$

解答　$-2<m<-1$，$-1<m<3$ のとき 2 個；
$m=-2$，-1，3 のとき 1 個；$m<-2$，$3<m$ のとき 0 個

$\boxed{3}$

解答　$x<-\sqrt{2}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sqrt{2}<x$

$\boxed{4}$

解答　$l=-2-\sqrt{2}$，$-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{5}$

解答　$\dfrac{1}{5}<a\leqq 1$

$\boxed{6}$

解答　$(x,\ y)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}$，$(x,\ y)=(0,\ -1)$ のとき最小値 -3

$\boxed{7}$

解答　(1)　最大値 2，最小値 -2
(2)　$x=\dfrac{5\sqrt{26}}{13}$，$y=\dfrac{3\sqrt{26}}{13}$ で最大値 $\sqrt{26}$；
$x=-\dfrac{5\sqrt{26}}{13}$，$y=-\dfrac{3\sqrt{26}}{13}$ で最小値 $-\sqrt{26}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$m<-14$　　(2)　$-14<m\leqq 2$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$\theta=60°$　　(2)　$\theta=50°$

$\boxed{10}$

解答　略

$\boxed{11}$

解答　略

$\boxed{12}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(5,\ 5)$，$(7,\ 3)$
(2)　$n=5$，1

$\boxed{13}$

解答　略

$\boxed{14}$

解答　$x=90k-68$，$y=37k-28$（k は整数）

$\boxed{15}$

解答　$(x,\ y,\ z)=(4,\ 5,\ 20)$，$(4,\ 6,\ 12)$

$\boxed{16}$

解答　(1)　略　　(2)　略

$\boxed{17}$

解答　(1)　100 個　　(2)　2 進法で表すと 39 桁，40 桁；8 進法で表すと 13 桁，14 桁

$\boxed{18}$

解答　(1)　$-10<a<10$　　(2)　$a<-10$，$10<a$

$\boxed{19}$

解答　(1)　$a<-5$，$4<a$　　(2)　$a<-2$，$1<a$

$\boxed{1}$

解説

放物線 $y=x^2-3x+4$ を平行移動したもので，頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるから，
求める 2 次関数は　$y=(x-p)^2+2p+1$　と表される。
このグラフが点 $(2,\ 4)$ を通るから　$(2-p)^2+2p+1=4$
整理すると　$(p-1)^2=0$　　よって　$p=1$

したがって　$y=(x-1)^2+3$　（$y=x^2-2x+4$ でもよい）

$\boxed{2}$

（解説）

$(m+1)x^2+2(m-1)x+2m-5=0$ ……① とする。

[1]　$m+1=0$　すなわち　$m=-1$ のとき

①は　$-4x-7=0$　　これを解いて　$x=-\dfrac{7}{4}$

よって，実数解は1個。

[2]　$m+1 \neq 0$　すなわち　$m \neq -1$ のとき

①は2次方程式で，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m+1)(2m-5)=-(m^2-m-6)=-(m+2)(m-3)$$

$D>0$ となるのは，$(m+2)(m-3)<0$ のときである。

これを解いて　$-2<m<3$

$m \neq -1$ であるから　$-2<m<-1$，$-1<m<3$

このとき，実数解は2個。

$D=0$ となるのは，$(m+2)(m-3)=0$ のときである。

これを解いて　$m=-2$，3　　このとき，実数解は1個。

$D<0$ となるのは，$(m+2)(m-3)>0$ のときである。

これを解いて　$m<-2$，$3<m$　　このとき，実数解は0個。

以上により　$-2<m<-1$，$-1<m<3$ のとき　2個

$m=-2$，-1，3 のとき　1個

$m<-2$，$3<m$ のとき　0個

$\boxed{3}$

（解説）

$x^2=t$ とおくと　$t \geqq 0$

不等式は　$2t^2-5t+2>0$

ゆえに　$(2t-1)(t-2)>0$　　よって　$0 \leqq t<\dfrac{1}{2}$，$2<t$

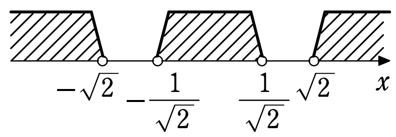
$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & -1 & \longrightarrow & -1 \\ 1 & & -2 & \longrightarrow & -4 \\ \hline 2 & & 2 & & -5 \end{array}$$

したがって　$0 \leqq x^2<\dfrac{1}{2}$，$2<x^2$

$x^2 \geqq 0$ は常に成り立つ。

$x^2<\dfrac{1}{2}$ から　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$2<x^2$ から　$x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x$



以上から　$x<-\sqrt{2}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sqrt{2}<x$

$\boxed{4}$

（解説）

$y=-x^2+2lx-l^2-2l-1=-(x^2-2lx+l^2)-2l-1$

$=-(x-l)^2-2l-1$

$f(x)=-(x-l)^2-2l-1$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=l$，頂点は点 $(l,\ -2l-1)$ である。

[1]　$l<-1$ のとき，

$x=-1$ で最大値

$f(-1)=-(-1-l)^2-2l-1=-l^2-4l-2$

をとる。

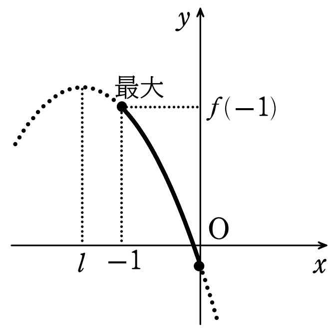
$-l^2-4l-2=0$ とすると

$l^2+4l+2=0$

ゆえに　$l=-2 \pm \sqrt{2^2-1 \cdot 2}$

$=-2 \pm \sqrt{2}$

$l<-1$ を満たすものは　$l=-2-\sqrt{2}$



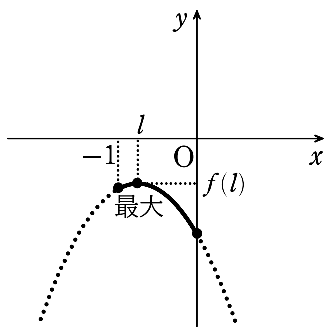
[2]　$-1 \leqq l \leqq 0$ のとき，

$x=l$ で最大値 $f(l)=-2l-1$ をとる。

$-2l-1=0$ とすると

$$l=-\frac{1}{2}$$

これは $-1 \leqq l \leqq 0$ を満たす。



[3]　$0<l$ のとき，

$x=0$ で最大値 $f(0)=-l^2-2l-1$ をとる。

$-l^2-2l-1=0$ とすると　　$(l+1)^2=0$

よって　　$l=-1$　　　　　これは $0<l$ を満たさない。

以上から，求める l の値は　　$l=-2-\sqrt{2},\ -\dfrac{1}{2}$

$\boxed{5}$

（解説）

不等式を変形すると　　$(a-1)x^2+(a-1)x-a<0$　……①

[1]　$a-1=0$　すなわち　$a=1$ のとき

①は　$0\cdot x^2+0\cdot x-1<0$ となり，これはすべての実数 x について成り立つ。

[2]　$a-1 \neq 0$　すなわち　$a \neq 1$ のとき

$(a-1)x^2+(a-1)x-a=0$ の判別式を D とすると，常に①が成り立つための必要十分条件は

$$a-1<0 \quad \text{かつ} \quad D=(a-1)^2-4(a-1)(-a)<0 \quad \cdots\cdots ②$$

②から　　$5a^2-6a+1<0$　　　ゆえに　　$(5a-1)(a-1)<0$

よって，②の解は　　$\dfrac{1}{5}<a<1$

$a-1<0$ すなわち $a<1$ との共通範囲は　　$\dfrac{1}{5}<a<1$

[1]，[2]から，求める a の値の範囲は　　$\dfrac{1}{5}<a \leqq 1$

$\boxed{6}$

（解説）

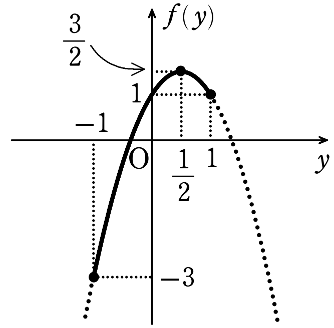
$x^2+y^2=1$ から　　$x^2=1-y^2$　……①

$x^2 \geqq 0$ であるから　　$1-y^2 \geqq 0$　　　ゆえに　　$(y+1)(y-1) \leqq 0$

よって　　$-1 \leqq y \leqq 1$　……②

また，①を代入すると

$$2x^2+2y-1=2(1-y^2)+2y-1=-2y^2+2y+1$$
$$=-2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$



これを $f(y)$ とおくと，②の範囲で $f(y)$ は

$y=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$，$y=-1$ で最小値 -3

をとる。①から

$y=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y=-1$ のとき　$x^2=0$　　　ゆえに　$x=0$

したがって　　$(x,\ y)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}$

$(x,\ y)=(0,\ -1)$ のとき最小値 -3

$\boxed{7}$

（解説）

(1)　$x^2-2xy+2y^2=2$ から　　$2y^2-2xy+x^2-2=0$　……①

y の２次方程式①が実数解をもつための条件は，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=(-x)^2-2(x^2-2) \geqq 0$$

ゆえに　　$x^2-4 \leqq 0$　　　よって　　$(x+2)(x-2) \leqq 0$

したがって　　$-2 \leqq x \leqq 2$

ゆえに，x のとりうる値の最大値は 2，最小値は -2

(2)　$2x+y=t$ とおくと　　$y=t-2x$

①に代入して　　$2(t-2x)^2-2x(t-2x)+x^2-2=0$

整理すると　$13x^2-10tx+2t^2-2=0$　$\cdots\cdots$ ②

x の２次方程式 ② が実数解をもつための条件は，判別式を D として

$$\frac{D}{4}=(-5t)^2-13\cdot(2t^2-2)\geqq 0$$

ゆえに　$t^2-26\leqq 0$　　よって　$(t+\sqrt{26})(t-\sqrt{26})\leqq 0$

したがって　$-\sqrt{26}\leqq t\leqq\sqrt{26}$

$t=\pm\sqrt{26}$ のとき $D=0$ で，② は重解 $x=-\dfrac{-10t}{2\cdot 13}=\dfrac{5t}{13}$ をもつ。

$2x+y=t$ より $y=t-2x$ であるから，$t=\pm\sqrt{26}$ のとき

$$x=\pm\frac{5\sqrt{26}}{13},\quad y=t-\frac{10}{13}t=\frac{3t}{13}=\pm\frac{3\sqrt{26}}{13}\ \text{(複号同順)}$$

よって，$2x+y$ は　$x=\dfrac{5\sqrt{26}}{13}$，$y=\dfrac{3\sqrt{26}}{13}$ で最大値 $\sqrt{26}$；

$x=-\dfrac{5\sqrt{26}}{13}$，$y=-\dfrac{3\sqrt{26}}{13}$ で最小値 $-\sqrt{26}$　をとる。

$\boxed{8}$

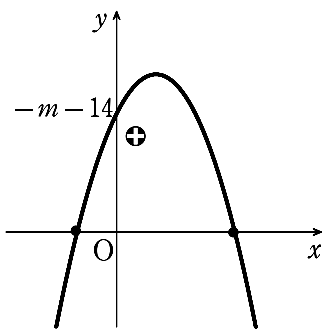
(解説)

$f(x)=-x^2+(m-10)x-m-14$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D&=(m-10)^2-4\cdot(-1)\cdot(-m-14)\\&=m^2-24m+44\\&=(m-2)(m-22)\end{aligned}$$

(1)　$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，$f(0)=-m-14>0$ のときである。

したがって　$m<-14$



(2)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分とのみ共有点をもつのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が共有点をもつから

$$D=(m-2)(m-22)\geqq 0$$

よって　$m\leqq 2$，$22\leqq m$　$\cdots\cdots$ ①

[2]　グラフの軸は直線 $x=\dfrac{m-10}{2}$ で，この軸について　$\dfrac{m-10}{2}<0$

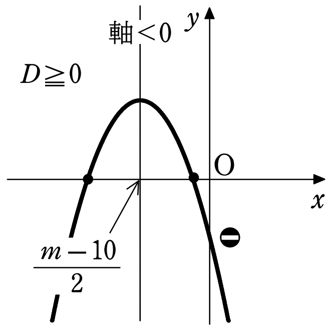
よって　$m<10$　$\cdots\cdots$ ②

[3]　$f(0)<0$ であるから　$-m-14<0$

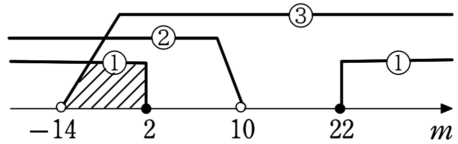
よって　$m>-14$　$\cdots\cdots$ ③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$-14<m\leqq 2$



(x 軸に接する場合も含める)



$\boxed{9}$

(解説)

(1)　$\angle\mathrm{PDQ}=\theta+25^\circ$，

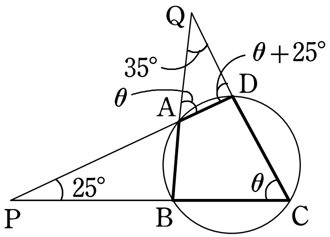
$\angle\mathrm{C}=\angle\mathrm{QAD}=\theta$

よって，$\triangle\mathrm{QAD}$ において

$$35^\circ+\theta+(\theta+25^\circ)=180^\circ$$

整理すると　$2\theta=120^\circ$

したがって　$\theta=60^\circ$



(2)　△ABE において，AB＝AE から

$\angle ABE = \angle AEB$

よって　$\angle ABE = (180° - 76°) \div 2 = 52°$

AD＝DC から　$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC}$

ゆえに　$\angle ABD = \angle DBC$

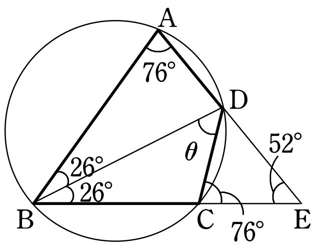
よって　$\angle DBC = 52° \div 2 = 26°$　……①

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle BAD = \angle DCE = 76°$　……②

△DBC において　$\theta + \angle DBC = \angle DCE$

①，② から　$\theta = 76° - 26° = 50°$



10

(解説)

$\angle BED = 90°$ であるから，点 E は線分 BD を直径とする円周上にある。

$\angle ADB = 90°$ であるから，AD はこの円の接線である。

よって，方べきの定理により

$AD^2 = AE \cdot AB$ ……①

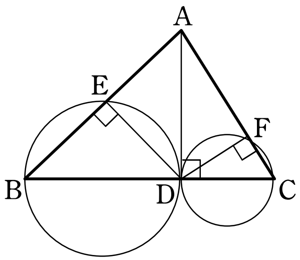
同様に，点 F は線分 DC を直径とする円周上にあり，

AD はこの円の接線であるから，方べきの定理により

$AD^2 = AF \cdot AC$ ……②

①，② から　$AE \cdot AB = AF \cdot AC$

したがって，4 点 B，C，F，E は 1 つの円の周上にある。



11

(解説)

折り目に関して，点 Q と対称な点を Q′ とすると，半円 O の Q における接線は，折り目に関して直線 OQ′ と対称である。

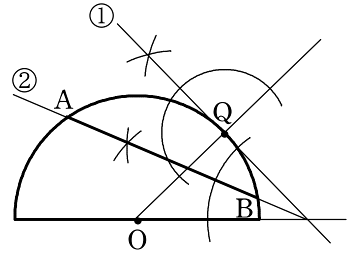
よって，次のように作図すればよい。

① 点 Q における半円 O の接線（Q を通り，半径OQ に垂直な直線）を引く。

② ① の直線と半円 O の直径の延長が作る角の二等分線を引く。

このとき，② の直線と半円 O の 2 つの交点 A，B を結ぶ線分 AB が折り目の線分である。

ただし，① の接線が直径と平行である場合には，線分 OQ の垂直二等分線が折り目になる。



12

(解説)

(1)　$xy = 2x + 4y - 5$ から　$xy - 2x - 4y = -5$　……①

ここで　$xy - 2x - 4y = x(y-2) - 4(y-2) - 8$

$= (x-4)(y-2) - 8$

① に代入して　$(x-4)(y-2) - 8 = -5$

よって　$(x-4)(y-2) = 3$　……②

x，y は正の整数であるから，$x-4$，$y-2$ は整数である。

また，$x \geqq 1$，$y \geqq 1$ であるから　$x - 4 \geqq -3$，$y - 2 \geqq -1$

ゆえに，② から　$(x-4,\ y-2) = (-3,\ -1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)$

したがって　$(x,\ y) = (1,\ 1),\ (5,\ 5),\ (7,\ 3)$

(2)　$\sqrt{4n^2+21} = m$ （m は自然数）とおくと　$4n^2 + 21 = m^2$

ゆえに　$m^2 - 4n^2 = 21$

よって　$(m+2n)(m-2n) = 21$　……①

m，n は自然数であるから，$m+2n$ と $m-2n$ も自然数であり，21 の約数である。

① を満たす m，n の値は，$m+2n \geqq m-2n \geqq 1$ に注意して，

$\begin{cases} m+2n=21 \\ m-2n=1 \end{cases}$，$\begin{cases} m+2n=7 \\ m-2n=3 \end{cases}$ を解くと　$\begin{cases} m=11 \\ n=5 \end{cases}$，$\begin{cases} m=5 \\ n=1 \end{cases}$

したがって，求める n の値は　$n=5$，1

$\boxed{13}$

(解説)

3 を法として，$n\equiv 0$，1，2 の各場合に関し，n^6+1 を計算すると，次の表のようになる。

n	0	1	2
n^6	$0^6\equiv 0$	$1^6\equiv 1$	$2^6\equiv 64\equiv 1$
n^6+1	$0+1\equiv 1$	$1+1\equiv 2$	$1+1\equiv 2$

よって，いずれの場合も $n^6+1\equiv 0 \pmod 3$ を満たさない。

したがって，n^6+1 は 3 で割り切れない。

$\boxed{14}$

(解説)

［解法 1］　$37x-90y=4$　…… ①

$m=37$，$n=90$ とする。

$90=37\cdot 2+16$ から　$16=90-37\cdot 2=n-2m$

$37=16\cdot 2+5$ から　$5=37-16\cdot 2=m-(n-2m)\cdot 2=5m-2n$

$16=5\cdot 3+1$ から　$1=16-5\cdot 3=(n-2m)-(5m-2n)\cdot 3=-17m+7n$

ゆえに　$37\cdot(-17)-90\cdot(-7)=1$

両辺に 4 を掛けて　$37\cdot(-68)-90\cdot(-28)=4$　…… ②

①−② から　$37(x+68)-90(y+28)=0$　すなわち　$37(x+68)=90(y+28)$

37 と 90 は互いに素であるから，k を整数として $x+68=90k$，$y+28=37k$ と表される。よって，解は　$x=90k-68$，$y=37k-28$（k は整数）

［解法 2］　$90=37\cdot 2+16$ から，$37x-90y=4$ は

$37x-(37\cdot 2+16)y=4$　すなわち　$37(x-2y)-16y=4$

$x-2y=s$　…… ① とおくと　$37s-16y=4$

$37=16\cdot 2+5$ から　$(16\cdot 2+5)s-16y=4$

整理して　$5s+16(2s-y)=4$

$2s-y=t$　…… ② とおくと　$5s+16t=4$

$16=5\cdot 3+1$ から　$5s+(5\cdot 3+1)t=4$

整理して　$5(s+3t)+t=4$

$s+3t=k$　…… ③ とおくと　$5k+t=4$

これから　$t=-5k+4$　…… ④

③ から　$s=k-3t$　④ を代入して　$s=16k-12$　…… ⑤

次に，② から　$y=2s-t$　④，⑤ を代入して　$y=37k-28$　…… ⑥

更に，① から　$x=2y+s$　⑤，⑥ を代入して　$x=90k-68$

よって，解は　$x=90k-68$，$y=37k-28$（k は整数）

参考　［解法 3］　合同式を利用した解法

(1)　6 を法として，$7x+6y=40$　…… ① から　$7x+6y\equiv 40 \pmod 6$

$6y\equiv 0 \pmod 6$ であるから　$7x\equiv 40 \pmod 6$　…… ②

ここで，$7\equiv 1 \pmod 6$，$40\equiv 4 \pmod 6$ であるから，② は　$x\equiv 4 \pmod 6$

したがって，k を整数とすると　$x=6k+4$

① から　$6y=40-7x=40-7(6k+4)=-42k+12$　よって　$y=-7k+2$

$x=6k+4$，$y=-7k+2$（k は整数）は ① を満たすから，解である。

(2)　37 を法として，$37x-90y=4$　…… ① から　$37x-90y\equiv 4 \pmod{37}$

$37x\equiv 0 \pmod{37}$ であるから　$-90y\equiv 4 \pmod{37}$　…… ②

ここで，$90\equiv 16 \pmod{37}$，$4\equiv -144 \pmod{37}$ であるから，② は

$-16y\equiv -144 \pmod{37}$　よって　$y\equiv 9 \pmod{37}$

したがって，k を整数とすると　$y=37k+9$

① から　$37x=90y+4=90(37k+9)+4=37\cdot 90k+814$　よって　$x=90k+22$

$x=90k+22$，$y=37k+9$（k は整数）は ① を満たすから，解である。

注意 1　ここで導かれた (2) の解 $x=90k+22$，$y=37k+9$ は，先に示した解 $x=90k-68$，$y=37k-28$ の k を $k+1$ におき換えると得られる。

注意 2　(1) は 7，(2) は 90 を法としてもよいが，一般に，法とする数は小さい方が処理しやすい。

15

(解説)

$0<x<y<z$ であるから　$\frac{1}{z}<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$

よって　$\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$

ゆえに　$\frac{1}{2}<\frac{3}{x}$　　よって　$\frac{1}{x}>\frac{1}{6}$

ゆえに　$x<6$　　$4 \leqq x$ であるから　$x=4,\ 5$

[1]　$x=4$ のとき，等式は　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$　……①

ここで　$\frac{1}{4}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$　　ゆえに　$\frac{1}{4}<\frac{2}{y}$

よって　$\frac{1}{y}>\frac{1}{8}$　　ゆえに　$y<8$

$4<y$ であるから　$y=5,\ 6,\ 7$

$y=5$ のとき，① は　$\frac{1}{5}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$　　よって　$z=20$

これは $y<z$ を満たす。

$y=6$ のとき，① は　$\frac{1}{6}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$　　よって　$z=12$

これは $y<z$ を満たす。

$y=7$ のとき，① は　$\frac{1}{7}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$　　よって　$z=\frac{28}{3}$

これは条件を満たさない。

[2]　$x=5$ のとき，等式は　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$　……②

ここで　$\frac{3}{10}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$

ゆえに　$\frac{3}{10}<\frac{2}{y}$　　よって　$\frac{1}{y}>\frac{3}{20}$

ゆえに　$y<\frac{20}{3}=6.6\cdots\cdots$　　$5<y$ であるから　$y=6$

このとき，② は　$\frac{1}{6}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$　　よって　$z=\frac{15}{2}$

これは条件を満たさない。

[1]，[2] から　$(x,\ y,\ z)=(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12)$

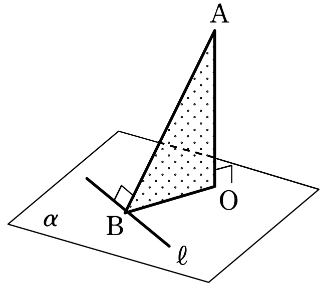
16

(解説)

(1)　$\mathrm{OA}\perp\alpha$ であり，直線 ℓ は平面 α 上の直線であるから　$\mathrm{OA}\perp\ell$

このことと，$\mathrm{AB}\perp\ell$ から，直線 ℓ は平面 OAB に垂直である。

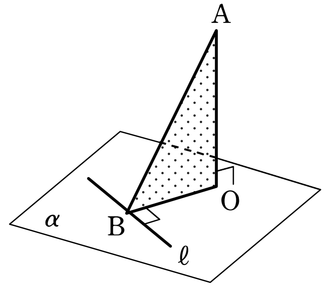
したがって　$\mathrm{OB}\perp\ell$



(2)　$\mathrm{OA}\perp\alpha$ であり，直線 ℓ は平面 α 上の直線であるから　$\mathrm{OA}\perp\ell$

このことと，$\mathrm{OB}\perp\ell$ から，直線 ℓ は平面 OAB に垂直である。

したがって　$\mathrm{AB}\perp\ell$



17

(解説)

(1)　N は 5 進法で表すと 3 桁となる自然数であるから

$$5^{3-1}\leqq N<5^3 \quad すなわち \quad 5^2\leqq N<5^3$$

この不等式を満たす自然数 N の個数は　$5^3-5^2=5^2(5-1)=4\cdot25=100$（個）

別解　5 進法で表すと，3 桁となる数は，$○□□_{(5)}$ の ○ に 1 ～ 4，□に 0 ～ 4 のいずれかを入れた数であるから，この場合の数を考えて　$4\cdot5^2=100$（個）

(2)　N は 4 進法で表すと 20 桁となる自然数であるから

$$4^{20-1}\leqq N<4^{20} \quad すなわち \quad 4^{19}\leqq N<4^{20} \quad \cdots\cdots ①$$

①から　$(2^2)^{19} \leqq N < (2^2)^{20}$

すなわち　$2^{38} \leqq N < 2^{40}$　……②

ゆえに，N を 2 進法で表すと，39 桁，40 桁 の数となる。

また，② から　$(2^3)^{12} \cdot 2^2 \leqq N < (2^3)^{13} \cdot 2$

よって　$4 \cdot 8^{12} \leqq N < 2 \cdot 8^{13}$

$8^{12} < 4 \cdot 8^{12}$，$2 \cdot 8^{13} < 8^{14}$ であるから　$8^{12} < N < 8^{14}$

ゆえに，N を 8 進法で表すと，13 桁，14 桁の数となる。

$\boxed{18}$

(解説)

$F(x) = f(x) - g(x)$ とすると　$F(x) = 2x^2 - 2ax + 50 = 2\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{2} + 50$

(1)　すべての実数 x に対して $f(x) > g(x)$ が成り立つことは，すべての実数 x に対して $F(x) > 0$，すなわち [$F(x)$ の最小値]>0 が成り立つことと同じである。

$F(x)$ は $x = \dfrac{a}{2}$ で最小値 $-\dfrac{a^2}{2} + 50$ をとるから　$-\dfrac{a^2}{2} + 50 > 0$

よって　$(a+10)(a-10) < 0$　ゆえに　$-10 < a < 10$

(2)　ある実数 x に対して $f(x) < g(x)$ が成り立つことは，ある実数 x に対して $F(x) < 0$，すなわち [$F(x)$ の最小値]<0 が成り立つことと同じである。

よって　$-\dfrac{a^2}{2} + 50 < 0$　ゆえに　$(a+10)(a-10) > 0$

よって　$a < -10$，$10 < a$

$\boxed{19}$

(解説)

$$f(x) = (x-1)^2 + 2,\quad g(x) = -(x-3)^2 + a^2 + a$$

(1)　$0 \leqq x \leqq 4$ を満たすすべての実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1) < g(x_2)$ が成り立つのは

$0 \leqq x \leqq 4$ において，[$f(x)$ の最大値]$<$[$g(x)$ の最小値]

が成り立つときである。$0 \leqq x \leqq 4$ において

$f(x)$ の最大値は $f(4) = 11$，$g(x)$ の最小値は $g(0) = a^2 + a - 9$

よって　$11 < a^2 + a - 9$　ゆえに　$a^2 + a - 20 > 0$

よって　$(a+5)(a-4) > 0$　ゆえに　$a < -5$，$4 < a$

(2)　$0 \leqq x \leqq 4$ を満たすある実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1) < g(x_2)$ が成り立つのは

$0 \leqq x \leqq 4$ において，[$f(x)$ の最小値]$<$[$g(x)$ の最大値]

が成り立つときである。$0 \leqq x \leqq 4$ において

$f(x)$ の最小値は $f(1) = 2$，$g(x)$ の最大値は $g(3) = a^2 + a$

よって　$2 < a^2 + a$　ゆえに　$(a+2)(a-1) > 0$

よって　$a < -2$，$1 < a$