最終チェック　高1数学総合S

$\boxed{1}$

第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $\dfrac{4n^2+1}{2n^2-5}$　(2) $\dfrac{7n}{2-n^2}$　(3) $6n-n^3$

(4) $\dfrac{n^3-3}{n^2+4}$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n}}$

解答　(1) 2　(2) 0　(3) $-\infty$　(4) ∞　(5) $\dfrac{2}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{2n^2-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{5}{n^2}}=\frac{4+0}{2-0}=2$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}}{\frac{2}{n^2}-1}=\frac{0}{-1}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(6n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{6}{n^2}-1\right)=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}=\infty$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n}}{(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n}}{(n^2+5n)-(n^2+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n}}{3n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3}=\frac{2}{3}$

$\boxed{2}$

数列 $\{(x^2-2x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。
また，そのときの極限値を求めよ。

解答　$1-\sqrt{3}\leqq x<0$，$2<x\leqq 1+\sqrt{3}$
　極限値は　$x=1\pm\sqrt{3}$ のとき 1，　$1-\sqrt{3}<x<0$，$2<x<1+\sqrt{3}$ のとき 0

解説

与えられた数列が収束するための必要十分条件は　$-1<x^2-2x-1\leqq 1$

$-1<x^2-2x-1$ から　$x(x-2)>0$

よって　$x<0$，$2<x$　……①

$x^2-2x-1\leqq 1$ から　$x^2-2x-2\leqq 0$

よって　$1-\sqrt{3}\leqq x\leqq 1+\sqrt{3}$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$1-\sqrt{3}\leqq x<0$，$2<x\leqq 1+\sqrt{3}$

極限値は　$x=1\pm\sqrt{3}$ のとき　1，
　$1-\sqrt{3}<x<0$，$2<x<1+\sqrt{3}$ のとき　0

$\boxed{3}$

次の無限級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}+\cdots\cdots$$

解答　収束，$\dfrac{1}{6}$

解説

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{6}$

したがって，この無限級数は収束して，その和は　$\dfrac{1}{6}$

$\boxed{4}$

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-1)\sin\frac{1}{x}$

解答　(1) $\dfrac{5}{2}$　(2) 2　(3) -1　(4) 1

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\right)=\frac{5}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\cos x)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1+\cos x}{\cos x}$

$\displaystyle=1\cdot\frac{1+1}{1}=2$

(3) $x-\dfrac{\pi}{2}=\theta$ とおくと　$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\theta\longrightarrow 0$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{\theta\to 0}\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(-\frac{\theta}{\tan\theta}\right)$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to 0}\left(-\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta\right)=-1\cdot 1=-1$

(4) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$\theta\longrightarrow +0$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-1)\sin\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to +0}\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\sin\theta=\lim_{\theta\to +0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}-\sin\theta\right)$

$=1-0=1$

$\boxed{5}$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(2-x^3)$　(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x-3}$　(3) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-1}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}x^4-2x^3\right)$　(5) $\lim_{x\to-\infty}5^x$　(6) $\lim_{x\to\infty}\log_{0.1}x$

解答　(1) $-\infty$　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) 0　(4) ∞　(5) 0　(6) $-\infty$

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}(2-x^3)=-\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=0$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}x^4-2x^3\right)=\lim_{x\to\infty}x^4\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{x}\right)=\infty$

(5) $\lim_{x\to-\infty}5^x=0$

(6) $\lim_{x\to\infty}\log_{0.1}x=-\infty$

$\boxed{6}$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+6x})$　(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$

解答　(1) -3　(2) -1

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+6x})=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2+6x})(x+\sqrt{x^2+6x})}{x+\sqrt{x^2+6x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-6x}{x+\sqrt{x^2+6x}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-6}{1+\sqrt{1+\dfrac{6}{x}}}=-3$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

よって　$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t}-t)$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{(\sqrt{t^2-2t}-t)(\sqrt{t^2-2t}+t)}{\sqrt{t^2-2t}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{-2t}{\sqrt{t^2-2t}+t}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{1-\dfrac{2}{t}}+1}=-1$

参考　おき換えを用いずに，次のように計算してもよい。

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+2x}+x)(\sqrt{x^2+2x}-x)}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-1}=-1$

最終チェック　高 1 数学総合S

$\boxed{1}$

第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $\dfrac{4n^2+1}{2n^2-5}$　(2) $\dfrac{7n}{2-n^2}$　(3) $6n-n^3$

(4) $\dfrac{n^3-3}{n^2+4}$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n}}$

$\boxed{2}$

数列 $\{(x^2-2x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。
また，そのときの極限値を求めよ。

$\boxed{3}$

次の無限級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

$$\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}+\cdots\cdots$$

$\boxed{4}$

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin2x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-1)\sin\frac{1}{x}$

$\boxed{5}$

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2-x^3)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x-3}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}x^4-2x^3\right)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}5^x$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_{0.1}x$

$\boxed{6}$

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x}\right)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$