【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材②

中２甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｙ「三角比」の前半
数学Ｋ「整数」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

2つの整数767，221の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

$\boxed{2}$

等式 $19x+26y=1$ を満たす整数 x，y の組を互除法を用いて1つ求めよ。

$\boxed{3}$

方程式 $9x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

$\boxed{4}$

n は自然数とする。n^2+3n+8 と $n+2$ の最大公約数として考えられる数をすべて求めよ。

$\boxed{5}$

$xy-2x+4y+1=0$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

$\boxed{6}$

次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad (x \leqq y \leqq z)$$

$\boxed{7}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(0° < \theta < 180°)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$，$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\boxed{8}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{9}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の不等式を満たす θ の範囲を求めよ。

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta-1 \leqq 0$　　(2)　$2\cos\theta+1>0$　　(3)　$\tan\theta>-1$

$\boxed{10}$

次の式の値を求めよ。

(1)　$\cos(90°-\theta)\sin(180°-\theta)-\sin(90°-\theta)\cos(180°-\theta)$

(2)　$\cos^2\theta+\cos^2(90°-\theta)+\cos^2(90°+\theta)+\cos^2(180°-\theta)$

(3)　$\cos 56°\cos 124°+\sin 56°\cos 146°$

(4)　$\dfrac{1}{\sin^2 40°}-\tan^2 130°$

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　13

$\boxed{2}$

解答　$x=11$，$y=-8$

$\boxed{3}$

解答　$x=5k-1$，$y=-9k+2$（k は整数）

$\boxed{4}$

解答　1，2，3，6

$\boxed{5}$

解答　$(x,\ y)=(-13,\ 3),\ (-7,\ 5),\ (-5,\ 11),\ (-3,\ -7),\ (-1,\ -1),\ (5,\ 1)$

$\boxed{6}$

解答　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

(2)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=-2\sqrt{3}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$，$135^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$　　(2)　$0^\circ \leqq \theta < 120^\circ$

(3)　$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$，$135^\circ < \theta \leqq 180^\circ$

$\boxed{10}$

解答　(1)　1　　(2)　2　　(3)　-1　　(4)　1

$\boxed{1}$

解説

$767=221\cdot 3+104$

$221=104\cdot 2+13$

$104=13\cdot 8+0$

よって，最大公約数は　13

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 8 & & 2 & & 3 \\
13\,) & 104 &) & 221 &) & 767 \\
 & 104 & & 208 & & 663 \\ \hline
 & 0 & & 13 & & 104
\end{array}
$$

$\boxed{2}$

解説

$26=19\cdot 1+7$　移項すると　$7=26-19\cdot 1$

$19=7\cdot 2+5$　移項すると　$5=19-7\cdot 2$

$7=5\cdot 1+2$　移項すると　$2=7-5\cdot 1$

$5=2\cdot 2+1$　移項すると　$1=5-2\cdot 2$

よって　$1=5-2\cdot 2=5-(7-5\cdot 1)\cdot 2$

$=5\cdot 3-7\cdot 2=(19-7\cdot 2)\cdot 3-7\cdot 2$

$=19\cdot 3+7\cdot(-8)=19\cdot 3+(26-19\cdot 1)\cdot(-8)$

$=19\cdot 11+26\cdot(-8)$

すなわち　$19\cdot 11+26\cdot(-8)=1$　……①

したがって，求める整数 x，y の組の 1 つは

$x=11$，$y=-8$

$\boxed{3}$

解説

$9x+5y=1$　……①

$x=-1$，$y=2$ は①の整数解の 1 つである。

よって　$9\cdot(-1)+5\cdot 2=1$　……②

①－②から　$9(x+1)+5(y-2)=0$

すなわち　$9(x+1)=-5(y-2)$　……③

9 と 5 は互いに素であるから，$x+1$ は 5 の倍数である。

ゆえに，k を整数として，$x+1=5k$ と表される。

③に代入して　$9\cdot 5k=-5(y-2)$　すなわち　$y-2=-9k$

よって，解は　$x=5k-1$，$y=-9k+2$（k は整数）

4

(解説)

$$n^2+3n+8=(n+2)(n+1)-2+8$$
$$=(n+2)(n+1)+6$$

よって，n^2+3n+8 と $n+2$ の最大公約数は，$n+2$ と 6 の最大公約数に等しい。
したがって，最大公約数として考えられる数は，6 の正の約数の 1，2，3，6 である。

5

(解説)

$xy-2x+4y+1=0$ から　$(x+4)(y-2)+8+1=0$

すなわち　$(x+4)(y-2)=-9$

x，y は整数であるから，$x+4$，$y-2$ も整数である。

よって　$(x+4,\ y-2)=(-9,\ 1),\ (-3,\ 3),\ (-1,\ 9),\ (1,\ -9),\ (3,\ -3),$
$(9,\ -1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-13,\ 3),\ (-7,\ 5),\ (-5,\ 11),\ (-3,\ -7),\ (-1,\ -1),\ (5,\ 1)$

6

(解説)

$0<x\leqq y\leqq z$ であるから　$\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$　……①

よって　$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

すなわち　$1\leqq\dfrac{3}{x}$　ゆえに　$x\leqq 3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

[1]　$x=1$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

これを満たす自然数 y，z の組はない。

[2]　$x=2$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$　……②

ここで，① から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

よって　$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{2}{y}$　ゆえに　$y\leqq 4$

y は自然数で，$2=x\leqq y$ であるから　$y=2,\ 3,\ 4$

$y=2$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=0$　これを満たす自然数 z はない。

$y=3$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$　よって　$z=6$　(これは適する)

$y=4$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　よって　$z=4$　(これは適する)

[3]　$x=3$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$　……③

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{2}{y}$ であるから　$\dfrac{2}{3}\leqq\dfrac{2}{y}$　ゆえに　$y\leqq 3$

y は自然数で，$3=x\leqq y$ であるから　$y=3$

このとき，③ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$　よって　$z=3$　(これは適する)

以上から　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

7

(解説)

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$　よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$　……①

よって　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

(2)　$0°<\theta<180°$ では $\sin\theta>0$ であるから，① より　$\cos\theta<0$

ゆえに　$\sin\theta-\cos\theta>0$　……②

① から　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{2}$

よって，② から　　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

また　　$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=-2\sqrt{3}$$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$0°\leqq\theta\leqq90°$ のとき，$\cos\theta\geqq0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$90°<\theta\leqq180°$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\div\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

よって　　$(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{1}{2}>0$ より，$0°<\theta<90°$ であるから　$\cos\theta>0$

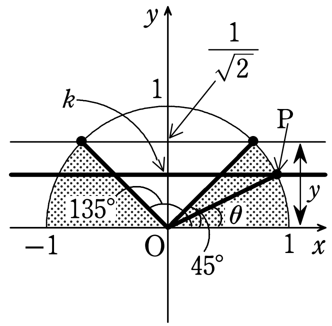
ゆえに　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

また　　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{9}$

(解説)

(1)　不等式は　　$\sin\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



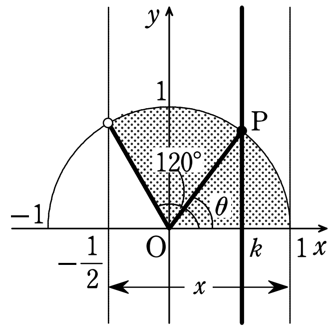
$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解くと

$$\theta=45°,\ 135°$$

よって，右の図から，求める θ の範囲は

$$0°\leqq\theta\leqq45°,\ 135°\leqq\theta\leqq180°$$

(2)　不等式は　　$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$



$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解くと

$$\theta=120°$$

よって，右の図から，求める θ の範囲は

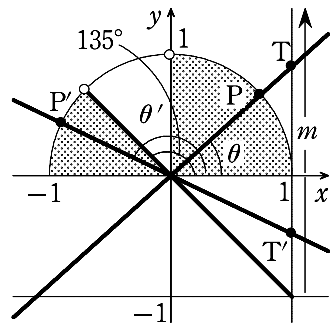
$$0°\leqq\theta<120°$$

(3)　$\tan\theta=-1$ を解くと

$$\theta=135°$$

よって，右の図から，求める θ の範囲は

$$0°\leqq\theta<90°,\ 135°<\theta\leqq180°$$



$\boxed{10}$

(解説)

(1)　(与式) $=\sin\theta\sin\theta-\cos\theta(-\cos\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(2)　(与式) $=\cos^2\theta+\sin^2\theta+(-\sin\theta)^2+(-\cos\theta)^2$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

(3)　$\cos124^\circ=\cos(180^\circ-56^\circ)=-\cos56^\circ$

$\cos146^\circ=\cos(90^\circ+56^\circ)=-\sin56^\circ$

よって　(与式) $=\cos56^\circ(-\cos56^\circ)+\sin56^\circ(-\sin56^\circ)$

$=-\cos^2 56^\circ-\sin^2 56^\circ$

$=-(\sin^2 56^\circ+\cos^2 56^\circ)=-1$

(4)　$\tan130^\circ=\tan(90^\circ+40^\circ)=-\dfrac{1}{\tan40^\circ}$

よって　(与式) $=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\left(-\dfrac{1}{\tan40^\circ}\right)^2=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\left(-\dfrac{\cos40^\circ}{\sin40^\circ}\right)^2$

$=\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\dfrac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\dfrac{1-\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\dfrac{\sin^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ}=1$