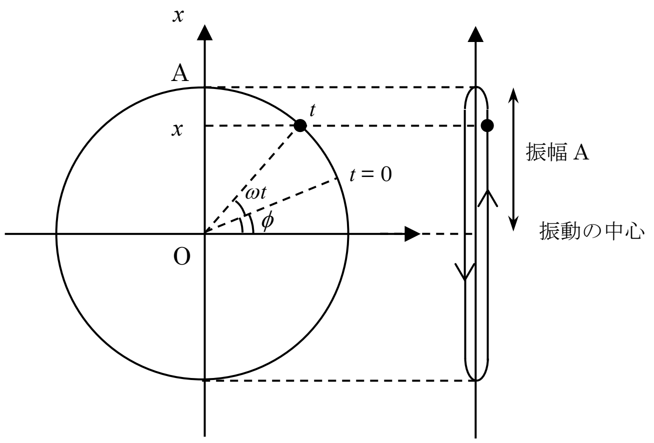
IV.【単振動】

■単振動■

○単振動とは・・・

等速円運動の正射影にあたる運動



・時刻 t における振動の中心からの物体の変位

$x = A\sin(\omega t + \phi)$

$\begin{cases} \text{振幅：} A\,[\mathrm{m}] \\ \text{位相：} (\omega t + \phi)\,[\mathrm{rad}] \end{cases}$

・時刻 t における物体の速度

$v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$

$\begin{cases} \text{振動の中心で最大} & v_{\max} = A\omega \\ \text{両端で 0} & v = 0 \end{cases}$

・時刻 t における物体の加速度

$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$

$\begin{cases} \text{両端で最大} & a_{\max} = A\omega^2 \\ \text{振動の中心で 0} & a = 0 \end{cases}$

・単振動をする物体の運動方程式

$F = ma = -m\omega^2 x = -Kx$ （$K = m\omega^2$ となる比例定数）

⇒振動の中心からの距離に比例した力：**復元力**

・角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$， 周期 $T[\mathrm{s}] = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$， 振動数 $f[\mathrm{Hz}] = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

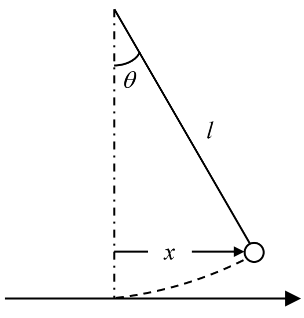
・単振動の位置エネルギー

$\dfrac{1}{2}Kx^2$ （x は振動の中心からの距離）

○単振り子

長さ l の糸におもりを付けて振らせる。

$\theta << 1$ のとき単振動として扱うことができる。



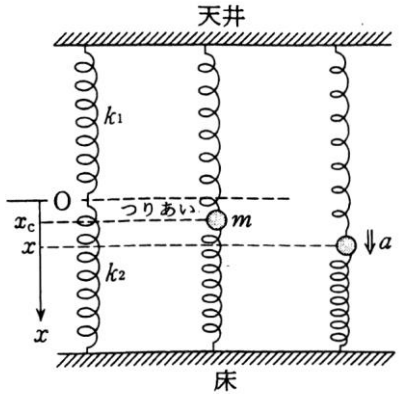
$F = -mg\sin\theta = -mg \cdot \dfrac{x}{l} = -\dfrac{mg}{l}x$

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

振り子の等時性：周期はおもりの質量や振幅に無関係である。

＜例題１＞

ばね定数がk_1，k_2の２本の軽いつる巻きばねを自然長のままＯ点でつなぎ，鉛直にして他端を天井と床に固定する。Ｏ点を原点にとり，鉛直下方にx軸をとる。ばねの接続点に質量mの小さいおもりをとりつけ，鉛直方向に振動させたときについて答えよ。ただし，重力加速度の大きさをgとする。



（１）おもりが位置xの点を通るときの加速度aを求めよ。

（２）振動の中心の位置x_Cと，周期Tを求めよ。

（３）つり合いの位置からdだけ動かした位置で小球からそっと手を離した。
　小球がつり合いの位置を通過するときの速さを求めよ。

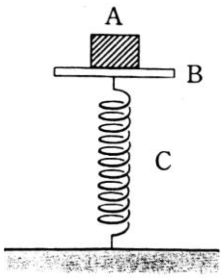
【１】ばね定数k_1，k_2の２本の軽いばね A，B を直列に連結し，A の一端を天井に固定し
それらを鉛直につるす。このときの B の下端の位置を O とし，O を原点として
鉛直下方にx軸をとる。B の下端に質量mの小球をとりつけ鉛直方向に振動させた
とき，重力加速度の大きさをgとして答えよ。

（１）位置xの点をおもりが通るときのおもりにかかるばねの弾性力Sを求めよ。

（２）振動の中心の位置x_Cと，振動数fを求めよ。

＜例題２＞

図のように，ばね定数 k のばね C の下端を固定し，上端に質量 M の水平な台 B を取り付け，その上に質量 m の物体 A をのせた装置がある。この装置全体をつり合いの位置を中心に，鉛直方向に振幅 r の単振動をさせる。このとき，物体 A が台 B から離れることがないとすれば物体 A も同じ単振動をする。ばねの質量は無視し，重力加速度の大きさを g として次の問いに答えよ。



（１）装置全体がつり合ったときの自然長からのばねの縮み Δl はいくらか。

（２）台 B が鉛直上向きに加速度 a で上昇するとき，物体 A が台 B を押す力の大きさ f はいくらか。

（３）台 B とともに単振動している物体 A の加速度 a はどれだけか。物体のつり合いの位置からの変位を x とし，加速度 a を x の関数として表せ。ただし，鉛直上方を x の正の方向にとる。

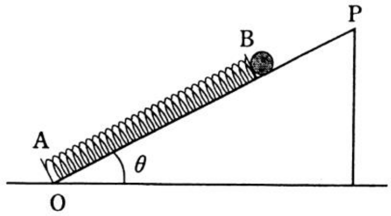
（４）物体 A が台 B を押す力 f を，物体 A のつり合いの位置からの変位 x の関数として表せ。

（５）台 B が最高点に達したとき，物体 A が台 B を押す力 f がちょうど 0 になったとする。このときの単振動の振幅 r_0 を M，m，k および g で表せ。

（６）台 B をつり合いの位置から $\sqrt{2}\ r_0$ だけ押し下げて静かに離した。このとき，物体 A はつり合いの位置からの変位が x_1 のところで台 B から離れ，そこからさらに高さ h だけ上昇した。x_1 および h を求めよ。

（京都産業大）

【２】図のように，水平面から角度θをなすなめらかな斜面 OP がある。自然の長さがℓでばね定数 k のばねの A 端を斜面の下端 O に固定し，ばねの上端 B に質量 m の小球を固定した。重力加速度の大きさを g とする。ただし，小球と斜面の間の摩擦および空気抵抗はないものとし，ばねの質量と小球の大きさは無視してよい。



（１）小球を静止させたところ，ばねの長さは自然の長さℓ から a だけ縮んだ位置でつりあった。a の大きさを求めよ。

（２）（１）の小球の静止位置から，小球を斜面にそって距離 b だけ押し下げて手を離すと，小球はばねの上端 B から離れることなく斜面にそって振動運動を続けた。

(a)　斜面上向きを正として，小球がつりあいの位置から変位 x にあるとき，小球にはたらく力を k, x を用いて表せ。

(b)　振動運動をする小球の周期 T はいくらか。

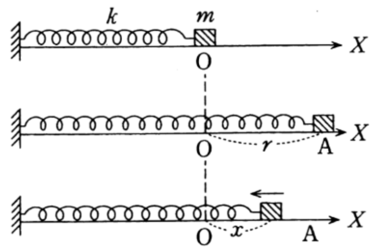
(c)　小球が最も高い位置にあるとき，小球のつりあいの位置からの変位はいくらか。

(d)　小球の振幅 A はいくらか。

(e)　小球の最大の速さ v_{max} をθ, a を用いずに表せ。

＜例題３＞

ばね定数 k[N/m]のばねの一端を壁に固定し，他端に質量 m [kg]のおもりをとりつけて水平な床上に置く。ばねが自然長のときのおもりの位置を座標の原点 O とし，X の正を右向きにとる。おもりを $X = r$ の位置 A まで引いた後，静かに手を放す。床とおもりとの間の動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g [m/s^2]として答えよ。



（１）手を放した後，おもりが位置 x の点を左向きに通るとき，その加速度を a [m/s^2]（右向きを正）として a を求めよ。

（２）おもりが左向きに運動するとき，振動の中心 O’ の X 座標 x_c[m]を求めよ。

（３）おもりの速さがはじめて 0 になる点 B の座標 x_1[m]を求めよ。

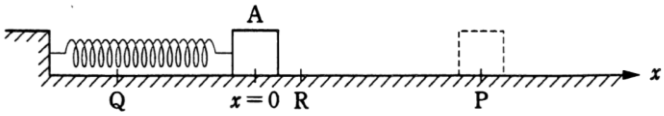
（４）おもりが A から B まで運動する時間 t_1[s]を求めよ。

（５）おもりが O’ 点をはじめて通るときの速さ V [m/s]を求めよ。

（６）おもりが B から右向きに運動するとき，振動の中心の X 座標 x'_c[m]と，速さが 0 になるまでの時間 t_2[s]を求めよ。

【３】

次の文章を読み，（１）～（３）の$\boxed{}$の中に適切な数式を入れよ。ただし，（４）はグラフで答えよ。



図に示すように，水平な床面上に質量m[kg]の物体Aを置き，つるまきばねを取り付ける。ばねが床面と水平となるように，ばねの他端を壁に固定する。物体Aは図のx軸上を運動し，その位置を座標xで表す。ばねが自然長のとき物体Aの位置を原点$x = 0$にとり，ばね定数をk [N/m]とする。物体Aと床面との間の動摩擦係数をμ'とする。また，重力加速度の大きさはg [m/s²]とし，ばねの質量は無視できるものとする。

物体Aを点P（$x = 5l$）まで引っ張り，時刻$t = 0$で静かに手をはなした。このとき，物体Aはx軸の負の向きに動き始め，点Q（$x = -3l$）で運動の向きを反転し，ふたたびx軸の正の向きに運動した。その後，物体Aは時刻$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ [s]で点R（$x = l$）に停止した。なお，次の問いではlを用いて答えてもよい。

（１）物体AがPからQまで移動するとき，ばねにたくわえられたエネルギー（弾性エネルギー）の変化は$\boxed{\text{ア}}$[J]と表される。また，この間に動摩擦力がした仕事は$\boxed{\text{イ}}$[J]である。両者の仕事は相等しいので，動摩擦係数μ'は$\boxed{\text{ウ}}$と求められる。

（２）時刻$t = 0$で手を離れた物体Aはしだいに速さを増し，最大の速さになったのち，徐々に減速して点Qで0となった。この間，座標xで物体Aが受ける力は右向きを正として$\boxed{\text{エ}}$[N]と表される。したがって，物体Aの運動は$x = \boxed{\text{オ}}$[m]を中心とする単振動の動きに等しいことがわかる。よって，この中心で物体Aの速さは最大となり，その値は$\boxed{\text{カ}}$[m/s]となる。また，物体Aが点Qで反転する時刻は$\boxed{\text{キ}}$[s]である。

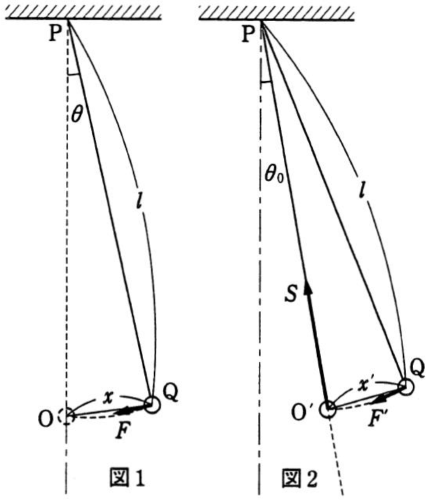
（３）次に物体AがQからRまで移動するとき，座標xで物体Aに作用する力は右向きを正として$\boxed{\text{ク}}$[N]と表され，この区間の振動の中心は$x = \boxed{\text{ケ}}$[m]である。

（４）物体Aの座標xと時間tとの関係をグラフに示せ。

（2003年　北海道大）

＜例題４＞

次の文の $\boxed{\ 1\ }$ から $\boxed{\ 8\ }$ に当てはまる式を記せ。ただし，重力加速度の大きさを g とし，空気抵抗は無視するものとする。



停車している電車の天井の点 P に長さ l [m]の軽い糸の上端を固定し，下端に質量 m [kg]の小球 Q を付けて，鉛直面内で振動させた。図１は，つりあいの位置 O からの Q の変位が x [m]となった瞬間を表している。糸と鉛直線のなす角を θ [rad]とすると，Q を O に引きもどそうとする力，すなわち復元力の大きさ F は m，g，θ を用いて $\boxed{\ 1\ }$ [N]と表される。小球 Q は半径 l の円周上を往復運動するが，振幅が小さい場合には，経路はほぼ直線と考えてよく，この往復運動は O を中心とする単振動であるとみなすことができる。このとき，F は，m，g，l，x を用いて $\boxed{\ 2\ }$ [N]と表される。

次に，Q の振動を静止させた。その後，電車は水平でまっすぐな線路上で等加速度運動を始めた。加速度の大きさは a [m/s²]であった。すると，図２のように，糸が鉛直線に対して角 θ_0 [rad]だけ傾いて Q は静止した。このときの Q の位置を O’とする。$\tan\theta_0$ を g，a を用いて表すと $\boxed{\ 3\ }$ となる。また，糸が引く力の大きさ S を m，g，a を用いて表すと $\boxed{\ 4\ }$ [N]となる。

ここで，Q を電車の加速度の方向と鉛直線がつくる平面内で小さく振動させた。図２のように，O’からの Q の変位を x' [m]とすると，Q に加わる復元力の大きさ F' は m，g，a，l，x' を用いて $\boxed{\ 5\ }$ [N]と表される。このとき Q は単振動をするが，その周期 T は g，a，l を用いて表すと $\boxed{\ 6\ }$ [s]となる。

O’を中心に単振動する Q が右端に来て，いったん静止した瞬間，糸を静かに切った。糸を切った瞬間の Q の真下の床の位置を R，そのときの Q の床からの高さを h [m]とすると，Q は糸を切った瞬間から $\boxed{\ 7\ }$ 秒後に R から $\boxed{\ 8\ }$ [m]離れた床上に落ちた。

（2002 年　武蔵工業大）

■発展問題■

【4】底面積S，高さlの円柱状の木片Aを水槽の水に浮かべる。木片は水中を抵抗がなくなめらかに運動し，水面のゆれや表面張力は無視する。また，すべての運動は鉛直方向のみを考え，横ゆれや回転運動などはしないとする。水の密度をρ，木片Aの密度を$\dfrac{\rho}{4}$，重力加速度の大きさをgとして次の問いに答えよ。ただし，水槽は木片より十分大きいとする。

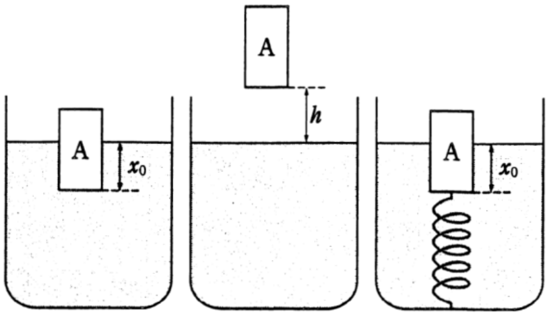


図1　図2　図3

（1）図1のように木片Aが静止しているとき，水面から木片の底面までの深さx_0を求めよ。

（2）木片Aを静止状態からわずかに水中に押し下げ，静かにはなしたところ，木片は上下に周期運動を始めた。その周期Tを求めよ。

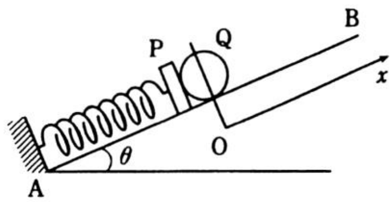
（3）次に，木片Aの上面が水面と同じになるまで押し下げ，静かにはなした。すると，図2のように木片Aは水中から完全に飛び出し，水面から木片の底面までの高さがhになるまで上昇した。高さhを求めよ。

木片Aが水面に静止して浮かんでいる状態にもどし，図3のようにばね定数kのばねを木片の底面と水槽の底との間に取り付けた。ばねの重さと体積は無視する。このとき，水面から木片の底面までの深さはx_0のままで，ばねは自然の長さだった。

（4）木片Aを静止状態からわずかに押し下げて静かにはなしたところ，木片は上下に周期運動を始めた。その周期T'を求めよ。

（2008年　横浜市立大－医）

【５】図のように水平面と角θ[度]をなすなめらかな斜面 AB 上に，自然の長さℓ [m]，ばね定数k [N/m]のばねが置かれ，ばねの一端は定点 A に固定されている。ばねの他端には質量M [kg]の板 P が取り付けられており，この板 P の上に質量m [kg]の物体 Q をのせる。



ばねの質量，P および Q の大きさは無視できるものとし，重力加速度の大きさをg [m/s^2]として，次の問いに答えよ。

（１）最初，物体 Q および板 P は静かに止まっていた。図はこの状態について描かれている。この状態において，

(a)　ばねが自然の長さから縮んでいる長さs [m]を求めよ。

(b)　ばねにたくわえられている弾性力による位置エネルギーU [J]を求めよ。

（２）（１）の静止状態からさらに長さd [m]だけ手でばねを押し縮めた後，急に手をはなした。その後の運動のようすは，d [m]の長さによって物体 Q が板 P から離れる場合と離れない場合が見られた。以下，（１）の Q の静止点を原点とし，図のように定めたx座標を用いて，これらの運動について考える。

(a)　Q が P から離れずにいっしょに運動する場合，

（ア）　位置x [m]における Q の加速度a [m/s^2]を求めよ。

（イ）　位置x [m]において Q が P から受ける力f [N]を求めよ。

(b)　Q が P から離れる場合，

（ア）　Q が P から離れるために必要なばねを押し縮める長さd [m]の条件を求めよ。

（イ）　Q が P から離れる瞬間の Q の速さv [m/s]を求めよ。

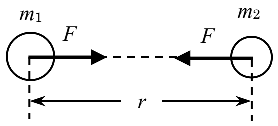
（1996 年　信州大）

V. 【万有引力】

■万有引力■

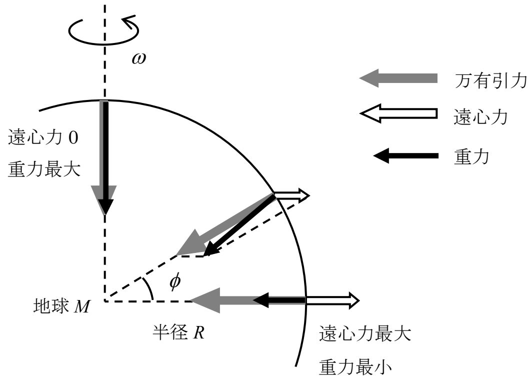
○万有引力の法則

2 つの物体が及ぼしあう万有引力の大きさ F [N]は，2 物体の質量 m_1，m_2 の積に比例し，物体間の距離 r [m]の 2 乗に反比例する。



$\boxed{F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\ [\mathrm{N}]}$ （万有引力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N・m²/ kg²）

○重力



地球の全質量 M[kg]が中心にあり，半径 R[m]の完全な球と仮定し，その自転の角速度を ω [rad/s]とする。
このとき，緯度 ϕ [rad]の地表にある質量 m [kg]の物体にはたらく力は
万有引力 $G\dfrac{Mm}{R^2}$ [N]と地球の自転による
遠心力 $mR\cos\phi\cdot\omega^2$ [N]の合力である。

しかし，遠心力が最大となる赤道上（$\cos\phi = 1$）でも万有引力の $\dfrac{1}{300}$ 倍ほどしかなく，

とくに断りのないかぎり，遠心力は無視してよい。
よって，重力加速度の大きさを g とすると，

地表面では $mg = G\dfrac{Mm}{R^2}$ より $\underline{GM = gR^2}$

地表面から高さ h [m]での重力加速度 g_h とすると，$GM = g_h(R + h)^2$

○万有引力による位置エネルギー

$$U = \int_{\infty}^{r} G\frac{m_1 m_2}{x^2}dx = \underline{-G\frac{m_1 m_2}{r}}$$ （**基準点は無限遠**）

※第一宇宙速度：地表すれすれに地球のまわりを等速円運動することができる速さ

$$mg = m\frac{{v_1}^2}{R} \text{ より } v_1 = \sqrt{gR}$$

第二宇宙速度：地上から打ち上げた物体が，無限の遠方へ行ってしまう最小の初速度（脱出速度）

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = 0 \text{ より } v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$$

○ケプラーの法則

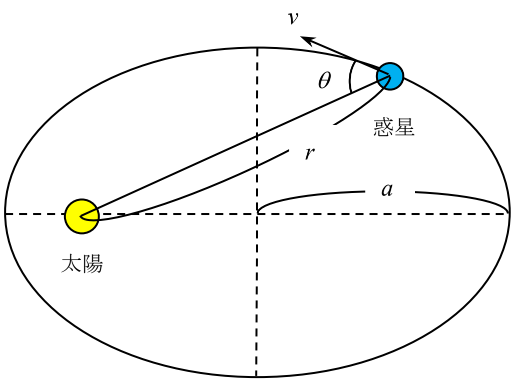
第一法則　惑星は太陽を１つの焦点とする楕円上を運動する。

第二法則　惑星と太陽とを結ぶ線分が，一定時間に通過する面積は一定である。

面積速度一定の法則： $\dfrac{1}{2}rv\sin\theta=$一定（惑星ごとに異なる一定値）

第三法則　惑星の公転周期 T の２乗は，軌道楕円の半長軸 a の３乗に比例する。

$T^2=ka^3$（惑星によらない一定値）



○よくある解法

(ⅰ)円運動のとき

① 向心力 ＝ 万有引力の運動方程式をたてる。

② $GM=gR^2$ を用いる。

(ⅱ)楕円軌道のとき

① 面積速度一定 $\dfrac{1}{2}r_1v_1\sin\theta_1=\dfrac{1}{2}r_2v_2\sin\theta_2$

② 力学的エネルギー保存則

③ $\dfrac{T^2}{a^3}=$一定

＜例題１＞

次の問いに答えよ。

（１）地球の半径を R，地球の質量を M，万有引力定数を G とするとき，地上 h の高さで地球のまわりを等速円運動する人工衛星の速さはいくらか。

（２）地球の半径を R，地表面の重力加速度の大きさを g とするとき，地上 h の点を通り地球のまわりを等速円運動する人工衛星の速さはいくらか。ただし，地球の自転の影響を無視する。

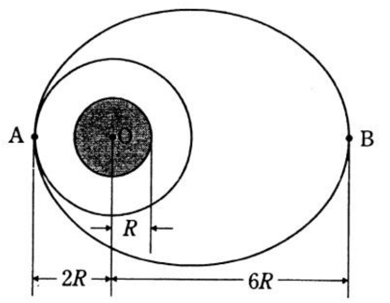
【１】質量 M，半径 R の地球の表面から鉛直に，初速度 v_0 で質量 m の物体を打ち上げるとき，万有引力定数を G とし，地球の自転および空気の抵抗を考えないものとして，次の問いに答えよ。

（１）この物体は地表からいくらかの高さまで上がるか。ただし，v_0 は大きく，重力加速度が一定とはみなされないところまで上昇するものとする。

（２）物体が地球から飛び去ってしまうために必要な初速度を求めよ。

＜例題２＞

地球の半径を R，質量を M，地表での重力加速度の大きさを g とする。いま，地表からの高さ R のところを円軌道を描いてまわる質量 m の人工衛星があるとする。



（１）人工衛星の速さ v_0 を求めよ。

（２）人工衛星の周期 T_0 を求めよ。

軌道上の点 A で人工衛星を加速し，速さを v_1 にしたところ，図の点 A が近地点，点 B が遠地点となるだ円軌道に移り，OB＝$6R$，点 B での速さは v_2 となった。

（３）点 A および点 B について力学的エネルギー保存則を表す式をたてよ。

（４）v_2 を v_1 で表せ。

（５）v_1 および v_2 を求めよ。

（６）新しい軌道をまわる人工衛星の周期 T を求めよ。

【２】（2010 年　工学院大学）

物体が地球から受ける重力は，物体が地球の各部分から受ける万有引力の合力である。以下では地球を半径が R の一様な密度の球と考え，地球の自転による影響は無視する。このとき，その合力は，地球の全質量が地球の中心にあるとしたときの万有引力に等しくなる。以下の問に答えよ。解答用紙には計算の途中経過を書き，解答を解答欄に記入せよ。計算過程のないものは減点する。

（１）地球の質量を M，万有引力定数を G としたとき，地表における重力加速度の大きさ g を G，M，R を用いて表せ。

（２）地表からの高さが h の場所での万有引力による加速度の大きさ g' は，地表の重力加速度の大きさ g の何倍になるかを R，h を用いて表せ。

（３）地球中心を中心とする半径 $r(r > R)$の円周上を，速さ v で等速円運動をする質量 m の人工衛星を考える。この人工衛星に働く加速度の大きさを v，r を用いて表せ。また，地球による万有引力が向心力(絶えず円の中心に向かっている力)になって，この加速度が生じていることを利用して，v を G，M，r を用いて表せ。

（４）地球中心から無限遠方の点を地球の万有引力の位置エネルギーの基準点(すなわち，位置エネルギーを 0 にする場所)として選ぶ。地球中心から，距離 $r(r \geqq R)$だけ離れた場所にある質量 m の物体の位置エネルギーを G，M，m，r を用いて表せ。

（５）地表($r = R$)で質量 m の物体に鉛直上向きで大きさ v_0 の速度を与えた。この物体の力学的エネルギー(運動エネルギーと万有引力の位置エネルギーの和)を G，M，m，R，v_0 を用いて表せ。ただし，位置エネルギーの基準点は（４）と同じとする。

（６）　（５）の物体は，初速度の大きさが V_0 未満の場合，地球による万有引力に引かれて戻ってくるが，V_0 より大きな速さで鉛直上向きに投射すると，地球による万有引力をふり切って，何処までも遠方へ飛んでいくことができる。力学的エネルギー保存則を利用し，V_0 を G，M，R を用いて表せ。

【３】(2010 年　工学院大学)

静止衛星は，赤道上空を地球の自転と同じ向きに，同じ周期で等速円運動している人工衛星であり，この軌道を静止軌道という。人工衛星を図 1 の半径 r の静止軌道に乗せるには，地表よりロケットによって，はじめに図 1 の半径 r_0 の円軌道に打ち上げる。次に，この円軌道上の A 点で加速して，地球の中心から最も離れた B 点までの距離が r となる楕円軌道に移行させる。さらに B 点で円運動になるように加速すれば，静止軌道に乗せることができる。地球の質量を M, 万有引力定数を G として，下の問いに答えよ。

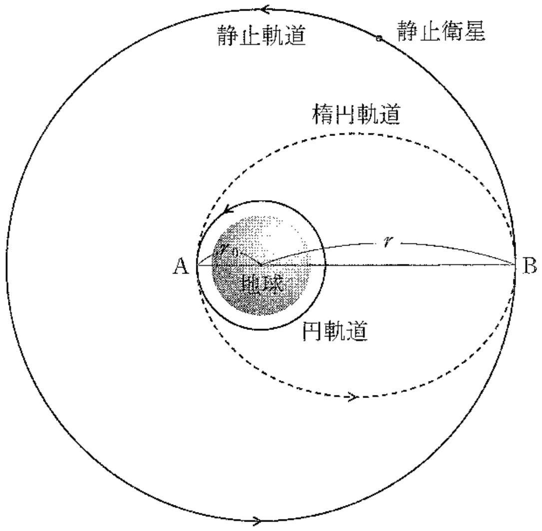


図 1

問 1　半径 r_0 の円軌道を運行している人工衛星の速さ v_0 はいくらか。

問 2　この人工衛星の質量を m とすると，人工衛星のもっている力学的エネルギーはいくらか。ただし，無限遠点での位置エネルギーを 0 とする。

問 3　速さ v_0，半径 r_0 で円軌道を運行していた人工衛星が，A 点で質量 Δm の燃料を進行方向と反対向きに瞬間的に噴射させた。噴射した燃料の速さは，噴射直後の衛星から見て V とする。噴射直後の人工衛星の速さはいくらか。

問 4　この噴射後，人工衛星は面積速度一定の法則にしたがって楕円軌道を運行する。楕円軌道上での人工衛星の速さを A 点で v_1，B 点で v とすると，v_1 は v, r_0，r を用いてどのように表されるか。

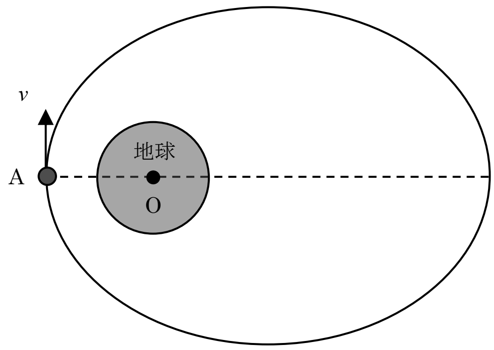
問 5　B 点での速さ v は G, M, r, r_0 を用いるとどのように表されるか。

問 6　B 点で再び燃料を進行方向と反対向きに噴射させ，人工衛星を楕円軌道から半径 r の静止軌道に移行させた。静止軌道の半径は地球の自転の周期 T を用いてどのように表されるか。

■発展問題■

【４】

　右図のように質量 m[kg]の物体に点 A から OA に垂直な方向の速度 v [m/s]を与える。地球は半径 R[m]の一様な球で，物体は地球から万有引力の法則にしたがう力を受けるものとする。物体が地球に衝突もせずかつ無限遠方に飛びさることもなく楕円軌道を描き続けるためには，速さ v はどのような範囲になければならないか，不等式で表せ。OA=2R[m]，地上での重力加速度を g[m/s^2]，地球の自転および公転は無視するものとする。



【５】（2005 年　東京大）

図１のように，地球の中心 O を通り，地表のある地点 A と地点 B とを結ぶ細長いトンネル内における小球の直線運動を考える。地球を半径 R，一様な密度 ρ の球とみなし，万有引力定数を G として以下の各問いに答えよ。なお，地球の中心 O から距離 r の位置において小球が地球から受ける力は，中心 O から距離 r 以内にある地球の部分の質量が中心 O に集まったと仮定した場合に，小球が受ける万有引力に等しい。ただし，地球の自転と公転の影響，トンネルと小球の間の摩擦および空気抵抗は無視するものとし，地球の質量は小球の質量に比べ十分大きいものとする。

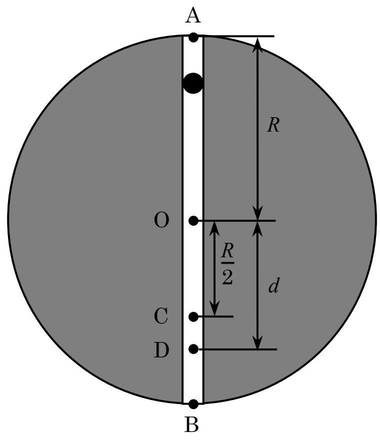


図１

Ⅰ　質量 m の小球を地点 A から静かにはなしたときの運動を考える。

（１）小球が地球の中心 O から距離 r（$r < R$）の位置にある時，小球に働く力の大きさを求めよ。

（２）小球が運動開始後，はじめて地点 A に戻ってくるまでの時間 T を求めよ。

Ⅱ　同じ質量 m を持つ二つの小球 P，Q の運動を考える。時刻 0 に小球 P を，時刻 t_1 に小球 Q を同一の地点 A で静かにはなしたところ，二つの小球は OB の中点 C で衝突した。ここで二つの小球間のはねかえり係数を 0 とし，衝突後二つの小球は一体となって運動するものとする。ただし，t_1 は問Ⅰ（２）で求めた時間 T より小さいものとする。

（１）t_1 を T を用いて表せ。

（２）二つの小球 P，Q が衝突してからはじめて中心 O を通過するまでの時間を T を用いて表せ。

Ⅲ　問Ⅱと同様に，時刻 0 に小球 P を，時刻 t_1 に小球 Q を同一の地点 A で静かにはなした。ただし，二つの小球間のはねかえり係数は e（$0<e<1$）とする。

（１）二つの小球が最初に衝突した後，小球 P は地点 B に向かって運動し，地球の中心 O から距離 d の点 D において中心 O に向かって折り返した。このときの d の値をはねかえり係数 e および地球の半径 R を用いて表せ。

（２）小球 P と小球 Q が二回目に衝突する位置を求めよ。

（３）その後二つの小球は衝突を繰り返した。十分時間が経過した後，どのような運動になるか答えよ。