$\boxed{1}$

x の方程式 $(i+1)x^2+(k+i)x+ki+1=0$ が実数解をもつとき，実数 k の値を求めよ。
ただし，$i^2=-1$ とする。

$\boxed{2}$

2 次方程式 $x^2-(k+6)x+6=0$ の解がすべて整数となるような定数 k の値とそのときの整数解をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

整式 $P(x)$ を x^2+5x+4 で割ると $2x+4$ 余り，x^2+x-2 で割ると $-x+2$ 余るという。
このとき，$P(x)$ を x^2+6x+8 で割った余りを求めよ。

$\boxed{4}$

方程式 $2x^4+5x^3+5x^2-2=0$ を解け。

$\boxed{5}$

方程式 $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$ を解け。

$\boxed{6}$

$x^3-2x^2-4=0$ の 3 つの解を α，β，γ とする。次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$　　(3)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$\boxed{7}$

2 直線 $x+3y-6=0$，$x-2y+2=0$ のなす鋭角 θ を求めよ。

$\boxed{8}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin 2\theta=\cos\theta$　　(2)　$\cos 2\theta-3\cos\theta+2\geqq 0$

$\boxed{9}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta-1>0$ を解け。

$\boxed{10}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $y=\cos\theta-\sin 2\theta-\sin\theta+1$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{11}$

関数 $y=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{12}$

ω が $x^2+x+1=0$ の解の 1 つであるとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\omega^{100}+\omega^{50}$　　(2)　$\dfrac{1}{\omega^8}+\dfrac{1}{\omega^4}$

(3)　$(\omega^{200}+1)^{100}+(\omega^{100}+1)^{10}+2$

$\boxed{13}$

方程式 $x^4+ax^2+b=0$ が $2-i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

$\boxed{14}$

整式 $P(x)$ を $(x-3)^2$ で割った余りが $2x-5$ であり，$x-1$ で割った余りが 5 であるとき，$P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割った余りを求めよ。

$\boxed{15}$

θ に関する方程式 $2\cos^2\theta-\sin\theta-a-1=0$ の解の個数を，定数 a の値の範囲によって

調べよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

$\boxed{1}$

解答　$k=-2$

$\boxed{2}$

解答　$k=-13$ のとき　$x=-6,\ -1$；$k=-11$ のとき　$x=-3,\ -2$；
$k=-1$ のとき　$x=2,\ 3$；$k=1$ のとき　$x=1,\ 6$

$\boxed{3}$

解答　$4x+12$

$\boxed{4}$

解答　$x=-1,\ \dfrac{1}{2},\ -1\pm i$

$\boxed{5}$

解答　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ 2\pm\sqrt{3}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　4　　(2)　7　　(3)　20

$\boxed{7}$

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$　　(2)　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

$\boxed{9}$

解答　$\dfrac{2}{3}\pi<\theta<\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

$\boxed{10}$

解答　(1)　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$　　(2)　最大値 2，最小値 $-\dfrac{1}{4}$

$\boxed{11}$

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 3，$\theta=\dfrac{\pi}{8}$ のとき最小値 $2-\sqrt{2}$

$\boxed{12}$

解答　(1)　-1　　(2)　-1　　(3)　1

$\boxed{13}$

解答　$a=-6,\ b=25$；他の解 $x=2+i,\ -2\pm i$

$\boxed{14}$

解答　$2x^2-10x+13$

$\boxed{15}$

解答　$a<-2$ のとき 0 個，$a=-2$ のとき 1 個，$-2<a<0$ のとき 2 個，
$a=0$ のとき 3 個，$0<a<\dfrac{9}{8}$ のとき 4 個，$a=\dfrac{9}{8}$ のとき 2 個，
$\dfrac{9}{8}<a$ のとき 0 個

$\boxed{1}$

解説

方程式の実数解を $x=\alpha$ とすると

$$(i+1)\alpha^2+(k+i)\alpha+ki+1=0$$

i について整理すると　$(\alpha^2+k\alpha+1)+(\alpha^2+\alpha+k)i=0$

$\alpha^2+k\alpha+1,\ \alpha^2+\alpha+k$ は実数であるから

$\alpha^2+k\alpha+1=0$　……①，$\alpha^2+\alpha+k=0$　……②

①−② から　$(k-1)\alpha+1-k=0$

よって　$(k-1)(\alpha-1)=0$　　ゆえに　$k=1$ または $\alpha=1$

[1]　$k=1$ のとき，①，② はともに　$\alpha^2+\alpha+1=0$

判別式を D とすると　$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

よって，α は虚数解となるから，条件に適さない。

[2]　$\alpha=1$ のとき，② から　$k=-2$　　これは ① も満たす。

したがって　$k=-2$

別解　[①，② を導くところまでは同じ]

② から　　$k=-\alpha^2-\alpha$　…… ③

① に代入して整理すると　　$\alpha^3-1=0$

ゆえに　　$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α は実数であるから　　$\alpha^2+\alpha+1=\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

よって　　$\alpha-1=0$　すなわち　$\alpha=1$

このとき，③ から　　$k=-2$

2

解説

2 つの整数解を α，β $(\alpha\leqq\beta)$ とする。

解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=k+6$，$\alpha\beta=6$

α，β は整数であるから，k も整数である。

$\alpha\beta=6$ から　　$(\alpha,\ \beta)=(-6,\ -1)$，$(-3,\ -2)$，$(2,\ 3)$，$(1,\ 6)$

また，$k=\alpha+\beta-6$ であるから　　$k=-13$，-11，-1，1

よって　　$k=-13$ のとき　$x=-6$，-1；

$k=-11$ のとき　$x=-3$，-2；

$k=-1$ のとき　$x=2$，3；

$k=1$ のとき　$x=1$，6

3

解説

$P(x)$ を x^2+6x+8 すなわち $(x+2)(x+4)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x+2)(x+4)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ①$$

また，$P(x)$ を x^2+5x+4，x^2+x-2 すなわち $(x+1)(x+4)$，$(x-1)(x+2)$ で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x+1)(x+4)Q_1(x)+2x+4 \quad \cdots\cdots ②$$

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q_2(x)-x+2 \quad \cdots\cdots ③$$

② から　　$P(-4)=-4$

これと ① から　　$-4a+b=-4$　…… ④

③ から　　$P(-2)=4$

これと ① から　　$-2a+b=4$　…… ⑤

④，⑤ を連立して解くと　　$a=4$，$b=12$

したがって，求める余りは　　$4x+12$

4

解説

$P(x)=2x^4+5x^3+5x^2-2$ とすると

$$P(-1)=2(-1)^4+5(-1)^3+5(-1)^2-2=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

2	5	5	0	-2	-1
	-2	-3	-2	2	
2	3	2	-2	0	

ゆえに　　$P(x)=(x+1)(2x^3+3x^2+2x-2)$

また，$Q(x)=2x^3+3x^2+2x-2$ とすると

$$Q\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}-2=0$$

よって，$Q(x)$ は $x-\dfrac{1}{2}$ を因数にもつ。

2	3	2	-2	$\frac{1}{2}$
	1	2	2	
2	4	4	0	

ゆえに　　$Q(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(2x^2+4x+4)$

$=(2x-1)(x^2+2x+2)$

よって　　$(x+1)(2x-1)(x^2+2x+2)=0$

ゆえに　　$x+1=0$　または　$2x-1=0$　または　$x^2+2x+2=0$

$x+1=0$ から　　$x=-1$

$2x-1=0$ から　　$x=\dfrac{1}{2}$

$x^2+2x+2=0$ から　$x=-1\pm i$

したがって　　$x=-1$，$\dfrac{1}{2}$，$-1\pm i$

5

解説

$x=0$ は方程式の解でないから，方程式の両辺を x^2 で割ると

$$x^2-7x+14-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

よって　$x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$ であるから　$(t^2-2)-7t+14=0$

ゆえに　$t^2-7t+12=0$　よって　$(t-3)(t-4)=0$

したがって　$t=3,\ 4$

[1]　$t=3$ のとき　$x+\frac{1}{x}=3$

両辺に x を掛けて整理すると　$x^2-3x+1=0$

これを解くと　$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

[2]　$t=4$ のとき　$x+\frac{1}{x}=4$

両辺に x を掛けて整理すると　$x^2-4x+1=0$

これを解くと　$x=2\pm\sqrt{3}$

したがって，解は　$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，$2\pm\sqrt{3}$

6

解説

3 次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=4$$

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2^2-2\cdot0=4$

(2)　$x^3-2x^2-4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ が成り立つ。

両辺に $x=-1$ を代入すると

$$-1-2-4=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)$$

よって　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=7$

(3)　α，β，γ は $x^3-2x^2-4=0$ の解であるから

$$\alpha^3-2\alpha^2-4=0,\ \beta^3-2\beta^2-4=0,\ \gamma^3-2\gamma^2-4=0$$

ゆえに　$\alpha^3=2\alpha^2+4$，$\beta^3=2\beta^2+4$，$\gamma^3=2\gamma^2+4$

よって　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+12=2\cdot4+12=20$

別解　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ であるから

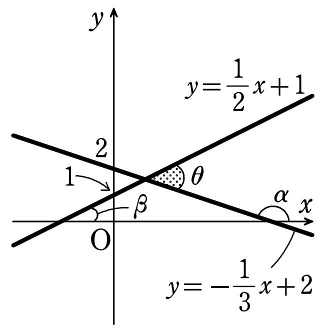
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2\cdot(4-0)+3\cdot4=20$$

7

解説

2 直線の方程式を変形すると

$$y=-\frac{1}{3}x+2,\ y=\frac{1}{2}x+1$$



図のように，2 直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める鋭角 θ は

$$\theta=(\pi-\alpha)+\beta=\pi-(\alpha-\beta)$$

$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$ から

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}=-1$$

よって　$\tan\theta=\tan\{\pi-(\alpha-\beta)\}=-\tan(\alpha-\beta)=1$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{4}$

別解　2 直線は垂直でないから　$\tan\theta=\left|\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}\right|=1$

よって　$\theta=\frac{\pi}{4}$

8

解説

(1)　方程式から　$2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

ゆえに　$\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$

よって　$\cos\theta=0$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　　$\cos\theta = 0$ より　$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ より　$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

以上から，解は　　$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(2)　不等式から　　$2\cos^2\theta - 1 - 3\cos\theta + 2 \geqq 0$

整理すると　　$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 \geqq 0$

ゆえに　　$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) \geqq 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ では，$\cos\theta - 1 \leqq 0$ であるから　　$\cos\theta - 1 = 0,\ 2\cos\theta - 1 \leqq 0$

よって　　$\cos\theta = 1,\ \cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

したがって，解は　　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$

$\boxed{9}$

解説

不等式から　$\sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta + 1 < 0$

$\sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta = 2\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから，不等式は

$2\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1 < 0$　すなわち　$\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) < -\dfrac{1}{2}$

$2\theta - \dfrac{\pi}{6} = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

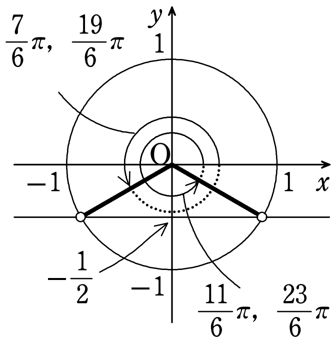
$$-\frac{\pi}{6} \leqq t < 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

この範囲で $\sin t < -\dfrac{1}{2}$ を解くと

$$\frac{7}{6}\pi < t < \frac{11}{6}\pi,\quad \frac{19}{6}\pi < t < \frac{23}{6}\pi$$

すなわち　$\dfrac{7}{6}\pi < 2\theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{11}{6}\pi,$

$\dfrac{19}{6}\pi < 2\theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{23}{6}\pi$



よって　　$\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

$\boxed{10}$

解説

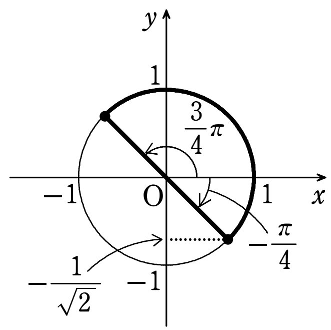
(1)　$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから　　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$

ゆえに　　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

よって　　$-1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$

すなわち　　$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$



(2)　$y = \cos\theta - \sin 2\theta - \sin\theta + 1$

$= \cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta + 1$

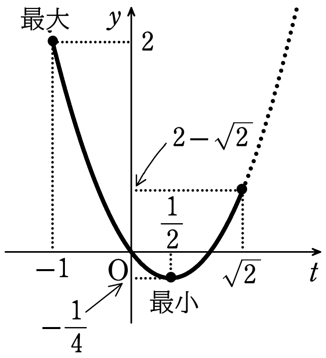
$= (\sin\theta - \cos\theta)^2 - (\sin\theta - \cos\theta)$

y を t の式で表すと

$$y = t^2 - t = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ の範囲において，y は $t = -1$ のとき

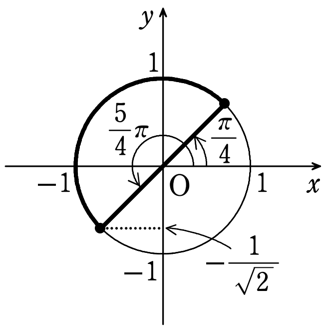
最大値 2，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{4}$ をとる。



$\boxed{11}$

（解説）

$$y=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta$$
$$=\frac{1+\cos2\theta}{2}-\sin2\theta+3\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$$
$$=2-(\sin2\theta+\cos2\theta)=2-\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$



$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　　$\frac{\pi}{4}\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}\leqq2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

すなわち　　$\frac{\pi}{4}\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$

ゆえに　　$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$　……①

よって　　$2-\sqrt{2}\leqq2-\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq3$

したがって　　$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 3

　　$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{8}$ のとき最小値 $2-\sqrt{2}$

$\boxed{12}$

（解説）

ω は $x^2+x+1=0$ の解の 1 つであるから　　$\omega^2+\omega+1=0$

よって　　$\omega^2+\omega=-1$，$\omega^2+1=-\omega$，$\omega+1=-\omega^2$

また，$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ であるから　　$\omega^3=1$

(1)　$\omega^{100}+\omega^{50}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega+(\omega^3)^{16}\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

(2)　$\omega^8=(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega^2$,　　$\omega^4=\omega^3\cdot\omega=\omega$

　よって　　$\frac{1}{\omega^8}+\frac{1}{\omega^4}=\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^3}{\omega^2}+\frac{\omega^3}{\omega}=\omega+\omega^2=-1$

(3)　$(\omega^{200}+1)^{100}+(\omega^{100}+1)^{10}+2=(\omega^2+1)^{100}+(\omega+1)^{10}+2$
$$=(-\omega)^{100}+(-\omega^2)^{10}+2$$
$$=\omega^{100}+\omega^{20}+2=\omega+\omega^2+2$$
$$=-1+2=1$$

$\boxed{13}$

（解説）

$2-i$ が解であるから　　$(2-i)^4+a(2-i)^2+b=0$

　　$(2-i)^2=4-4i+i^2=3-4i$,

　　$(2-i)^4=\{(2-i)^2\}^2=(3-4i)^2=9-24i+16i^2=-7-24i$

であるから　　$(-7-24i)+a(3-4i)+b=0$

整理すると　　$(3a+b-7)-4(a+6)i=0$

a，b は実数であるから，$3a+b-7$ と $a+6$ も実数である。

ゆえに　　$3a+b-7=0$，$a+6=0$

これを解いて　　$a=-6$，$b=25$

このとき，方程式は　　$x^4-6x^2+25=0$

実数係数の 4 次方程式が虚数解 $x=2-i$ をもつから，それと共役な複素数 $x=2+i$ もこの方程式の解になる。……(*)

よって，x^4-6x^2+25 は $\{x-(2-i)\}\{x-(2+i)\}$ すなわち x^2-4x+5 で割り切れる。

右の割り算から

$$x^4-6x^2+25=(x^2-4x+5)(x^2+4x+5)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+4x+5 \\ \hline
x^2-4x+5 & x^4\qquad-6x^2\qquad+25 \\
 & x^4-4x^3+5x^2 \\ \hline
 & 4x^3-11x^2\qquad+25 \\
 & 4x^3-16x^2+20x \\ \hline
 & 5x^2-20x+25 \\
 & 5x^2-20x+25 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$x^2+4x+5=0$ を解くと　　$x=-2\pm i$

したがって，他の解は

$$x=2+i,\ -2\pm i$$

別解　[(*) から始める]　x^4+ax^2+b は
$\{x-(2-i)\}\{x-(2+i)\}$ すなわち
x^2-4x+5 で割り切れる。

右の割り算において，

(余り)$=0$ とすると

$4a+24=0$,

$-5a+b-55=0$

よって　$a=-6$，$b=25$

このとき，割り算の商は

x^2+4x+5

$x^2+4x+5=0$ を解くと

$x=-2\pm i$

ゆえに，他の解は　$x=2+i$，$-2\pm i$

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2+4x+(a+11) \\ \cline{2-2}
x^2-4x+5\,\big) & x^4 \qquad\quad +ax^2 \qquad\qquad\quad +b \\
 & x^4-4x^3 \quad +5x^2 \\ \cline{2-2}
 & 4x^3+(a-5)x^2 \qquad\qquad +b \\
 & 4x^3 \quad -16x^2 \quad +20x \\ \cline{2-2}
 & (a+11)x^2 \quad -20x+b \\
 & (a+11)x^2-4(a+11)x+5(a+11) \\ \cline{2-2}
 & (4a+24)x-5a+b-55
\end{array}
$$

$\boxed{14}$

(解説)

$P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$(x-1)(x-3)^2Q(x)$ は $(x-3)^2$ で割り切れるから，$P(x)$ を $(x-3)^2$ で割ったときの余りは，ax^2+bx+c を $(x-3)^2$ で割ったときの余りと等しい。

$P(x)$ を $(x-3)^2$ で割ると $2x-5$ 余るから

$$ax^2+bx+c=a(x-3)^2+2x-5$$

よって，等式 ① は次のように表される。

$$P(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)+a(x-3)^2+2x-5$$

したがって　$P(1)=a(1-3)^2+2\cdot1-5=4a-3$

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りは 5 であるから　$P(1)=5$

ゆえに　$4a-3=5$　　よって　$a=2$

したがって，求める余りは

$2(x-3)^2+2x-5$　すなわち　$2x^2-10x+13$

$\boxed{15}$

(解説)

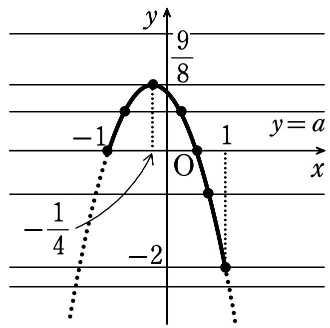
$\sin\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq x\leqq 1$

方程式は　$2(1-x^2)-x-a-1=0$

ゆえに　$-2x^2-x+1=a$

$f(x)=-2x^2-x+1$ とすると　$f(x)=-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}$

$y=f(x)$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べると



$a<-2$，$\dfrac{9}{8}<a$ のとき　0 個

$a=\dfrac{9}{8}$，$-2<a<0$ のとき

$-1<x<1$ の範囲に 1 個

$0<a<\dfrac{9}{8}$ のとき

$-1<x<1$ の範囲に 2 個

$a=0$ のとき

$-1<x<1$ の範囲に 1 個と，$x=-1$ のときの 1 個

$a=-2$ のとき　$x=1$ のときの 1 個

$\sin\theta=x$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解の個数は

$x=\pm1$ のとき 1 個，　$-1<x<1$ のとき　2 個

したがって，求める解の個数は

$a<-2$ のとき 0 個，$a=-2$ のとき 1 個，

$-2<a<0$ のとき 2 個，$a=0$ のとき 3 個，

$0<a<\dfrac{9}{8}$ のとき 4 個，$a=\dfrac{9}{8}$ のとき 2 個，

$\dfrac{9}{8}<a$ のとき 0 個。