【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材①

中２六甲数学

【注意事項】

本教材は

数学１「数と式」の展開・因数分解
数学２「円と接線」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の式を展開せよ。

(1) $(a+3b-c)^2$　　(2) $(x+y+7)(x+y-7)$

(3) $(x-3y+2z)(x+3y-2z)$　　(4) $(x^2-3x+1)(x^2+4x+1)$

$\boxed{2}$

次の式を展開せよ。

(1) $(a+b)^3(a-b)^3$　　(2) $(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-3x+9)$

$\boxed{3}$

次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+27　　(2) $64p^3-27q^3$

$\boxed{4}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-9$　　(4) $(x+y+1)^4-(x+y)^4$

$\boxed{5}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3b+16-4ab-4a^2$　　(2) $3x^2-2z^2+4yz+2xy+5xz$

$\boxed{6}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2-xy-2y^2-x-7y-6$　　(2) $3x^2+7xy+2y^2-5x-5y+2$

$\boxed{7}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$\boxed{8}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4-9x^2y^2+16y^4$　　(2) $4x^4+11x^2y^2+9y^4$

$\boxed{9}$

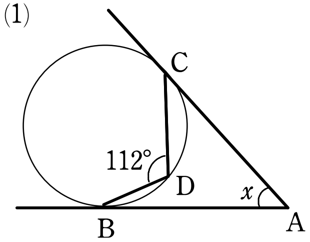
次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3-b^3-c^3-3abc$　　(2) $a^3+6ab-8b^3+1$

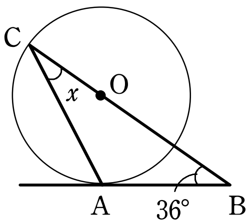
$\boxed{10}$

右の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。(1) では，AB，AC は円の接線であり，(2) では，AB は円の接線で，O は円の中心である。

(1)

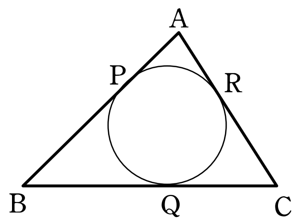


(2)



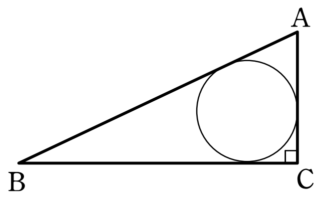
$\boxed{11}$

△ABC において，AB＝12 cm，BC＝14 cm，CA＝10 cm である。△ABC の内接円が辺 AB，BC，CA と接する点をそれぞれ P，Q，R とするとき，線分 BQ の長さを求めなさい。



12

$\angle C=90^\circ$ の直角三角形 ABC において，$AB=17$ cm，$BC=15$ cm，$CA=8$ cm である。
この三角形の内接円の半径を求めなさい。



【解答＆解説】

1

解答 (1) $a^2+9b^2+c^2+6ab-6bc-2ca$ (2) $x^2+2xy+y^2-49$

(3) $x^2-9y^2-4z^2+12yz$ (4) $x^4+x^3-10x^2+x+1$

2

解答 (1) $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$ (2) x^6+26x^3-27

3

解答 (1) $(x+3)(x^2-3x+9)$ (2) $(4p-3q)(16p^2+12pq+9q^2)$

4

解答 (1) $(x^2-8x+6)(x-4)^2$ (2) $(2x^2+4xy+2y^2+2x+2y+1)(2x+2y+1)$

5

解答 (1) $(a+2)(a-2)(ab-4)$ (2) $(x+2z)(3x+2y-z)$

6

解答 (1) $(x+y+2)(x-2y-3)$ (2) $(x+2y-1)(3x+y-2)$

7

解答 (1) $(a+b)(b+c)(c+a)$ (2) $-(a-b)(b-c)(c-a)$

8

解答 (1) $(x^2+xy-4y^2)(x^2-xy-4y^2)$ (2) $(2x^2+xy+3y^2)(2x^2-xy+3y^2)$

9

解答 (1) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$

(2) $(a-2b+1)(a^2+2ab+4b^2-a+2b+1)$

10

解答 (1) $\angle x=44°$ (2) $\angle x=27°$

11

解答 8 cm

12

解答 3 cm

1

解説

(1) $(a+3b-c)^2=\{a+(3b-c)\}^2=a^2+2a(3b-c)+(3b-c)^2$

$=a^2+6ab-2ac+9b^2-6bc+c^2$

$=a^2+9b^2+c^2+6ab-6bc-2ca$

別解 $(a+3b-c)^2=\{a+3b+(-c)\}^2$

$=a^2+(3b)^2+(-c)^2+2\cdot a\cdot 3b+2\cdot 3b(-c)+2(-c)a$

$=a^2+9b^2+c^2+6ab-6bc-2ca$

(2) $(x+y+7)(x+y-7)=\{(x+y)+7\}\{(x+y)-7\}=(x+y)^2-7^2$

$=x^2+2xy+y^2-49$

(3) $(x-3y+2z)(x+3y-2z)=\{x-(3y-2z)\}\{x+(3y-2z)\}$

$=x^2-(3y-2z)^2=x^2-9y^2-4z^2+12yz$

(4) $(x^2-3x+1)(x^2+4x+1)=\{(x^2+1)-3x\}\{(x^2+1)+4x\}$

$=(x^2+1)^2+(x^2+1)x-12x^2$

$=(x^4+2x^2+1)+x^3+x-12x^2$

$=x^4+x^3-10x^2+x+1$

2

解説

(1) $(a+b)^3(a-b)^3=\{(a+b)(a-b)\}^3=(a^2-b^2)^3$

$=(a^2)^3-3(a^2)^2b^2+3a^2(b^2)^2-(b^2)^3$

$=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$

(2) $(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-3x+9)$

$=(x-1)(x^2+x+1)\times(x+3)(x^2-3x+9)$

$=(x^3-1)(x^3+27)$

$=(x^3)^2+26x^3-27$

$=x^6+26x^3-27$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=(x+3)(x^2-3x+9)$

(2)　$64p^3-27q^3=(4p)^3-(3q)^3=(4p-3q)\{(4p)^2+(4p)\cdot(3q)+(3q)^2\}$

$=(4p-3q)(16p^2+12pq+9q^2)$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$(与式)=(x-1)(x-7)\times(x-3)(x-5)-9$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)-9$

$=(x^2-8x)^2+22(x^2-8x)+96$

$=(x^2-8x+6)(x^2-8x+16)$

$=(x^2-8x+6)(x-4)^2$

(2)　$x+y=t$ とおくと

$(与式)=(t+1)^4-t^4$

$=\{(t+1)^2+t^2\}\{(t+1)^2-t^2\}$

$=(2t^2+2t+1)(2t+1)$

$=\{2(x+y)^2+2(x+y)+1\}\{2(x+y)+1\}$

$=(2x^2+4xy+2y^2+2x+2y+1)(2x+2y+1)$

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　$a^3b+16-4ab-4a^2=(a^3-4a)b+16-4a^2$

$=a(a^2-4)b-4(a^2-4)$

$=(a^2-4)(ab-4)$

$=(a+2)(a-2)(ab-4)$

(2)　$3x^2-2z^2+4yz+2xy+5xz=(2x+4z)y+3x^2+5xz-2z^2$

$=2(x+2z)y+(x+2z)(3x-z)$

$=(x+2z)(2y+3x-z)$

$=(x+2z)(3x+2y-z)$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　$(与式)=x^2-(y+1)x-(2y^2+7y+6)$

$=x^2-(y+1)x-(y+2)(2y+3)$　$\longleftarrow$ [A]

$=\{x+(y+2)\}\{x-(2y+3)\}$　$\longleftarrow$ [B]

$=(x+y+2)(x-2y-3)$

[A]
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & 2 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline 2 & & 6 & & 7 \end{array}$$

[B]
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & y+2 & \longrightarrow & y+2 \\ 1 & & -(2y+3) & \longrightarrow & -2y-3 \\ \hline 1 & & -(y+2)(2y+3) & & -(y+1) \end{array}$$

(2)　$(与式)=3x^2+(7y-5)x+(2y^2-5y+2)$

$=3x^2+(7y-5)x+(y-2)(2y-1)$　$\longleftarrow$ [C]

$=\{x+(2y-1)\}\{3x+(y-2)\}$　$\longleftarrow$ [D]

$=(x+2y-1)(3x+y-2)$

[C]
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & -2 & \longrightarrow & -4 \\ 2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline 2 & & 2 & & -5 \end{array}$$

[D]
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & 2y-1 & \longrightarrow & 6y-3 \\ 3 & & y-2 & \longrightarrow & y-2 \\ \hline 3 & & (y-2)(2y-1) & & 7y-5 \end{array}$$

$\boxed{7}$

(解説)

(1)　$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

(2)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b-c)bc$

$= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + (b-c)bc$

$= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}$

$= (b-c)(a-b)(a-c)$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)$

$\boxed{8}$

解説

(1) $x^4 - 9x^2y^2 + 16y^4 = \{x^4 - 8x^2y^2 + (4y^2)^2\} - x^2y^2$

$= (x^2 - 4y^2)^2 - (xy)^2$

$= \{(x^2 - 4y^2) + xy\}\{(x^2 - 4y^2) - xy\}$

$= (x^2 + xy - 4y^2)(x^2 - xy - 4y^2)$

(2) $4x^4 + 11x^2y^2 + 9y^4 = \{(2x^2)^2 + 12x^2y^2 + (3y^2)^2\} - x^2y^2$

$= (2x^2 + 3y^2)^2 - (xy)^2$

$= \{(2x^2 + 3y^2) + xy\}\{(2x^2 + 3y^2) - xy\}$

$= (2x^2 + xy + 3y^2)(2x^2 - xy + 3y^2)$

$\boxed{9}$

解説

(1) $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$

$= a^3 + (-b)^3 + (-c)^3 - 3a(-b)(-c)$

$= \{a + (-b) + (-c)\}\{a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 - a(-b) - (-b)(-c) - (-c)a\}$

$= (a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ca)$

(2) $a^3 + 6ab - 8b^3 + 1$

$= a^3 - 8b^3 + 1 + 6ab = a^3 + (-2b)^3 + 1^3 - 3a\cdot(-2b)\cdot 1$

$= \{a + (-2b) + 1\}\{a^2 + (-2b)^2 + 1^2 - a\cdot(-2b) - (-2b)\cdot 1 - 1\cdot a\}$

$= (a - 2b + 1)(a^2 + 4b^2 + 1 + 2ab + 2b - a)$

$= (a - 2b + 1)(a^2 + 2ab + 4b^2 - a + 2b + 1)$

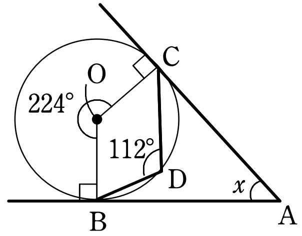
$\boxed{10}$

解説

(1) 円の中心を O とし，半径 OB，OC を引く。

AB，AC は円の接線であるから

$\angle\mathrm{OBA} = \angle\mathrm{OCA} = 90^\circ$



ここで，$\angle\mathrm{CDB}$ は，D を含まない $\overset{\frown}{\mathrm{CB}}$ に対する円周角であるから，その弧に対する中心角は

$2\times\angle\mathrm{CDB} = 2\times 112^\circ = 224^\circ$

よって，四角形 OBAC において

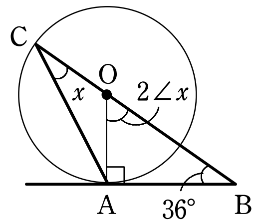
$\angle x = 360^\circ - (\angle\mathrm{BOC} + 90^\circ + 90^\circ)$

$= 360^\circ - \{(360^\circ - 224^\circ) + 90^\circ + 90^\circ\} = 44^\circ$

(2) 半径 OA を引く。

AB は円の接線であるから

$\angle\mathrm{OAB} = 90^\circ$



円周角の定理により

$\angle\mathrm{AOB} = 2\times\angle\mathrm{ACB} = 2\angle x$

よって，△OAB において　$2\angle x + 90^\circ + 36^\circ = 180^\circ$

これを解いて　$\angle x = 27^\circ$

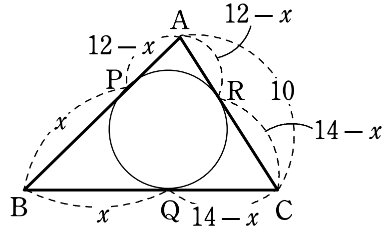
$\boxed{11}$

解説

BQ $= x$ cm とおく。

点 B から引いた接線の長さは等しいから

$\mathrm{BP} = \mathrm{BQ} = x$



よって　$\mathrm{CQ} = 14 - x$

$\mathrm{AP} = 12 - x$

点 C から引いた接線の長さは等しいから

$\mathrm{CR} = \mathrm{CQ} = 14 - x$

点 A から引いた接線の長さは等しいから

$\mathrm{AR} = \mathrm{AP} = 12 - x$

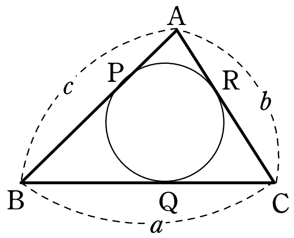
したがって，辺 CA の長さについて

$(14-x)+(12-x)=10$

これを解くと　　$x=8$

よって　　　$\mathrm{BQ}=8\,\mathrm{cm}$

参考　一般に，右の図のように，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，
$\mathrm{AB}=c$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円とその接点 P，Q，
R について，次のことが成り立つ。



$$\mathrm{AR}=\mathrm{AP}=\frac{1}{2}(b+c-a)$$

$$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}=\frac{1}{2}(c+a-b)$$

$$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR}=\frac{1}{2}(a+b-c)$$

証明　$\mathrm{AR}=\mathrm{AC}-\mathrm{CR}$，　$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}-\mathrm{BP}$ である。
$\mathrm{AR}=\mathrm{AP}$，$\mathrm{CR}=\mathrm{CQ}$，$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}$ であるから

$\mathrm{AR}=b-\mathrm{CQ}$　……①，　　　$\mathrm{AR}=c-\mathrm{BQ}$　……②

①＋② から　　$2\mathrm{AR}=b+c-(\mathrm{CQ}+\mathrm{BQ})$

すなわち　　　$2\mathrm{AR}=b+c-a$

したがって　　$\mathrm{AR}=\mathrm{AP}=\frac{1}{2}(b+c-a)$

同じように考えて

$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}=\frac{1}{2}(c+a-b)$，　$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR}=\frac{1}{2}(a+b-c)$　　終

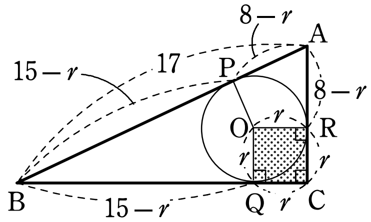
このことを用いると，この問題は次のように解ける。

$$\mathrm{BQ}=\frac{1}{2}(12+14-10)=8\,(\mathrm{cm})$$

12

解説

内接円の中心を O，半径を r cm とする。
また，内接円と 3 辺 AB，BC，CA との接点を，
それぞれ P，Q，R とする。
$\mathrm{OQ}\perp\mathrm{CQ}$，$\mathrm{OR}\perp\mathrm{CR}$，$\mathrm{QC}\perp\mathrm{CR}$ であり，
$\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}=r$ であるから，四角形 OQCR は 1 辺
の長さが r cm の正方形である。



よって　　　　$\mathrm{CR}=\mathrm{CQ}=r$

したがって　　$\mathrm{BQ}=15-r$，　　$\mathrm{AR}=8-r$

点 A から引いた接線の長さは等しいから

$\mathrm{AP}=\mathrm{AR}=8-r$

点 B から引いた接線の長さは等しいから

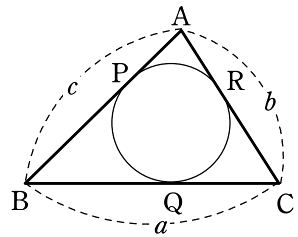
$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}=15-r$

よって，辺 AB の長さについて　　$(15-r)+(8-r)=17$

これを解くと　$r=3$

したがって，内接円の半径は　3 cm

参考　一般に，右の図のように，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，
$\mathrm{AB}=c$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円とその接点 P，Q，
R について，次のことが成り立つ。



$$\mathrm{AR}=\mathrm{AP}=\frac{1}{2}(b+c-a)$$

$$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}=\frac{1}{2}(c+a-b)$$

$$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR}=\frac{1}{2}(a+b-c)$$

このことを用いると，この問題の r は次のように解ける。

$$r=\mathrm{CQ}=\frac{1}{2}(15+8-17)=3$$