【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材①

高１甲陽数学

【注意事項】

本教材は

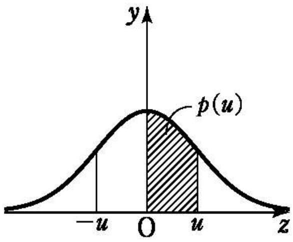
数学Ｕ「確率統計」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

正規分布表



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	**0.0000**	**0.0040**	**0.0080**	**0.0120**	**0.0160**	**0.0199**	**0.0239**	**0.0279**	**0.0319**	**0.0359**
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	**0.1915**	**0.1950**	**0.1985**	**0.2019**	**0.2054**	**0.2088**	**0.2123**	**0.2157**	**0.2190**	**0.2224**
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	**0.3413**	**0.3438**	**0.3461**	**0.3485**	**0.3508**	**0.3531**	**0.3554**	**0.3577**	**0.3599**	**0.3621**
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	**0.4332**	**0.4345**	**0.4357**	**0.4370**	**0.4382**	**0.4394**	**0.4406**	**0.4418**	**0.4429**	**0.4441**
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	**0.4772**	**0.4778**	**0.4783**	**0.4788**	**0.4793**	**0.4798**	**0.4803**	**0.4808**	**0.4812**	**0.4817**
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	**0.4938**	**0.4940**	**0.4941**	**0.4943**	**0.4945**	**0.4946**	**0.4948**	**0.4949**	**0.4951**	**0.4952**
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	**0.49865**	**0.49869**	**0.49874**	**0.49878**	**0.49882**	**0.49886**	**0.49889**	**0.49893**	**0.49897**	**0.49900**

【問題】

$\boxed{1}$

確率変数 X のとる値 x の範囲が $0 \leqq x \leqq 3$ で，その確率密度関数が $f(x)=k(4-x)$ で与えられている。このとき，定数 k の値を求めよ。

$\boxed{2}$

確率変数 X のとる値が $0 \leqq X \leqq 2$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=\dfrac{1}{2}x \ (0 \leqq x \leqq 2)$ で与えられるとき，$P(0.4 \leqq X \leqq 1.6)$ を求めよ。また，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

$\boxed{3}$

ある高校の，3 年男子 500 人の身長 X が，平均 170.9 cm，標準偏差 5.4 cm の正規分布に従うものとする。このとき

(1) 身長 180 cm 以上の生徒は約何人いるか。

(2) 高い方から 129 人の中に入るには，何 cm 以上あればよいか。

$\boxed{4}$

ある町の人の血液型は約 2 割が B 型である。900 人の献血者のうちの 200 人以上が B 型である確率を求めよ。

$\boxed{5}$

高校生 3 万人を対象にした数学のテストの平均は 52 点，標準偏差は 16 点であった。
受験者の中から 400 人を任意に選んだとき，この 400 人の平均が 51 点以上である確率を求めよ。

$\boxed{6}$

ある町の駅で乗降客 400 人を任意に抽出して調べたところ，196 人がその町の住人であった。乗降客中，その町の住人の比率を信頼度 99%で推定せよ。

$\boxed{7}$

数千枚の答案の採点をした。信頼度 95 %，誤差 2 点以内でその平均点を推定したいとすると，少なくとも何枚以上の答案を抜き出さなければならないか。また，誤差 1 点以内で推定するとすればどうか。ただし，従来の経験で点数の標準偏差は 15 点としてよいことはわかっているものとする。

$\boxed{8}$

ある 1 個のさいころを 1620 回投げたところ，1 の目が 240 回出た。このさいころは，1 の目の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ ではないと判断してよいか。

(1) 有意水準 5% で検定せよ。　(2) 有意水準 1% で検定せよ。

$\boxed{9}$

ある種子の発芽率は従来 80 % であったが，それを発芽しやすいように品種改良した新しい種子から無作為に 400 個抽出して種をまいたところ，333 個が発芽した。品種改良によって発芽率が上がったと判断してよいか。有意水準 5 % で片側検定せよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　$k=\dfrac{2}{15}$

$\boxed{2}$

解答　順に　0.6；$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{2}{9}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　約 23 人　　(2)　174.5 cm 以上

$\boxed{4}$

解答　0.0475

$\boxed{5}$

解答　0.8944

$\boxed{6}$

解答　[0.426，0.555]

$\boxed{7}$

解答　順に 217 枚，865 枚

$\boxed{8}$

解答　(1)　判断してよい　　(2)　判断できない

$\boxed{9}$

解答　品種改良によって発芽率が上がったとは判断できない。

$\boxed{1}$

解説

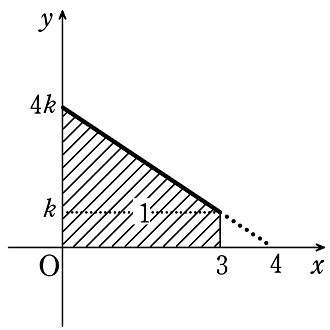
$0\leqq x\leqq 3$ において，$4-x>0$，$f(x)=k(4-x)\geqq 0$

であるから　$k\geqq 0$

また，$P(0\leqq X\leqq 3)=1$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4k-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot k=1 \qquad \text{よって} \quad \frac{15}{2}k=1$$

ゆえに　$k=\dfrac{2}{15}$　　これは $k\geqq 0$ を満たす。



$\boxed{2}$

解説

$$P(0.4\leqq X\leqq 1.6)=\int_{0.4}^{1.6}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_{0.4}^{1.6}=0.6$$

$$E(X)=\int_0^2 xf(x)\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

$$V(X)=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left\{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}x\right\}dx$$

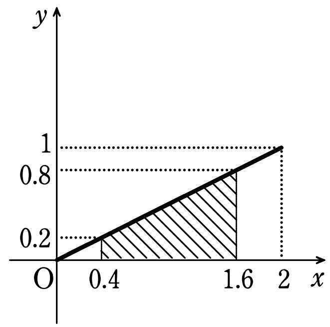
$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{8}{9}x^3+\frac{8}{9}x^2\right]_0^2=\frac{2}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

別解　[確率の求め方]

右の図から

$$P(0.4\leqq X\leqq 1.6)=\frac{1}{2}\times(0.2+0.8)\times 1.2$$
$$=0.6$$



$\boxed{3}$

(解説)

身長 X は正規分布 $N(170.9,\ 5.4^2)$ に従うから，$Z=\dfrac{X-170.9}{5.4}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

(1)　$P(X\geqq 180)=P\left(Z\geqq\dfrac{180-170.9}{5.4}\right)\fallingdotseq P(Z\geqq 1.69)=0.5-p(1.69)=0.5-0.4545$

$=0.0455$

よって，求める生徒の人数は $500\times 0.0455=22.75$ から　約 23 人

(2)　x cm 以上あれば，高い方から 129 人の中に入るとする。

$\dfrac{129}{500}=0.258$ であるから，$P(Z\geqq u)=0.258$ となる u の値を求めればよい $(u>0)$。

$$P(0\leqq Z\leqq u)=0.5-P(Z\geqq u)=0.5-0.258=0.242$$

ゆえに，正規分布表から　$u\fallingdotseq 0.65$

これに対する x の値は，$0.65=\dfrac{x-170.9}{5.4}$ を解いて　$x=174.41$

したがって，174.5 cm 以上あればよい。

$\boxed{4}$

(解説)

標本の B 型の率を R とする。

母比率 0.2，標本の大きさ 900 であるから

$$E(R)=0.2,\ \sigma(R)=\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{900}}=\frac{1}{75}$$

よって，R は近似的に正規分布 $N\left(0.2,\ \left(\dfrac{1}{75}\right)^2\right)$ に従う。

したがって，$Z=\dfrac{R-0.2}{\frac{1}{75}}=75R-15$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，200 人以上が B 型である確率は

$$P\left(R\geqq\frac{200}{900}\right)=P\left(Z\geqq\frac{5}{3}\right)\fallingdotseq P(Z\geqq 1.67)$$

$$=0.5-p(1.67)=0.5-0.4525=0.0475$$

$\boxed{5}$

(解説)

母平均 52，母標準偏差 16，標本の大きさ 400 であるから，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(52,\ \dfrac{16^2}{400}\right)$ すなわち $N(52,\ 0.8^2)$ に従う。

よって，$Z=\dfrac{\overline{X}-52}{0.8}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

したがって，求める確率は

$$P(\overline{X}\geqq 51)=P(Z\geqq -1.25)=0.5+p(1.25)$$

$$=0.5+0.3944=0.8944$$

$\boxed{6}$

(解説)

標本比率は $R=\dfrac{196}{400}=0.49$ で，標本の大きさは $n=400$ であるから

$$\sqrt{\frac{R(1-R)}{400}}=\frac{\sqrt{0.49\cdot 0.51}}{20}\fallingdotseq 0.025$$

よって，住人の比率の信頼度 99%のときの信頼区間は

$$[0.49-2.58\cdot 0.025,\ 0.49+2.58\cdot 0.025]$$

すなわち　$[0.426,\ 0.555]$

$\boxed{7}$

(解説)

n 枚の答案を抜き出すとき，その平均点を $\overline{X}$ とすると，答案全部の平均点 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は　$\left[\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{15}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+1.96\cdot\dfrac{15}{\sqrt{n}}\right]$

すなわち　$|\overline{X}-m|\leqq 1.96\cdot\dfrac{15}{\sqrt{n}}$

よって，誤差は最大で $1.96\cdot\dfrac{15}{\sqrt{n}}$ である。

$1.96 \cdot \dfrac{15}{\sqrt{n}} \leqq 2$ とすると　　$\sqrt{n} \geqq 14.7$

両辺を 2 乗すると　　$n \geqq 216.09$

したがって，誤差 2 点以内で推定するには，217 枚以上抜き出さなければならない。

$1.96 \cdot \dfrac{15}{\sqrt{n}} \leqq 1$ とすると　　$\sqrt{n} \geqq 29.4$

両辺を 2 乗すると　　$n \geqq 864.36$

したがって，誤差 1 点以内で推定するには，865 枚以上抜き出さなければならない。

$\boxed{8}$

解説

(1)　1 の目の出る確率を p とする。

ここで，1 の目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ であるという次の仮説を立てる。

$$\text{仮説 } H_0：\ p=\frac{1}{6}$$

仮説 H_0 が正しいとすると，1620 回のうち 1 の目が出る回数 X は，二項分布

$B\left(1620,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=1620 \cdot \frac{1}{6}=270$$

$$\sigma=\sqrt{1620 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)}=15$$

よって，$Z=\dfrac{X-270}{15}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$ であるから，有意水準 5 %の棄却域は

$$Z \leqq -1.96,\ 1.96 \leqq Z \quad \cdots\cdots ①$$

$X=240$ のとき $Z=\dfrac{240-270}{15}=-2$ であり，この値は棄却域 ① に入るから，仮説 H_0 を棄却できる。

したがって，1 の目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ ではないと判断してよい。

(2)　正規分布表より $P(-2.58 \leqq Z \leqq 2.58) \fallingdotseq 0.99$ であるから，有意水準 1 %の棄却域は

$$Z \leqq -2.58,\ 2.58 \leqq Z \quad \cdots\cdots ②$$

$X=240$ のとき $Z=-2$ であり，この値は棄却域 ② に入らないから，仮説 H_0 は棄却できない。

したがって，1 の目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ ではないと判断できない。

$\boxed{9}$

解説

品種改良した新しい種子の発芽率を p とすると，発芽率が上がったならば，$p>0.8$ である。

ここで，$p \geqq 0.8$ を前提として，仮説 $p=0.8$ を立てる。

この仮説が正しいとするとき，品種改良した新しい種子 400 個のうち発芽した種子の個数 X は二項分布 $B(400,\ 0.8)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=400 \times 0.8=320, \qquad \sigma=\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}=8$$

よって，$Z=\dfrac{X-320}{8}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表により $P(0 \leqq Z \leqq 1.64) \fallingdotseq 0.45$ であるから，有意水準 5 % の棄却域は

$$Z \geqq 1.64$$

$X=333$ のとき $Z=\dfrac{333-320}{8}=1.625$ であり，この値は棄却域に入らないから，仮説を棄却できない。

すなわち，品種改良によって発芽率が上がったとは判断できない。