1

Oを原点とする座標平面上の2点 $P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta+\cos7\theta,\ 2\sin\theta+\sin7\theta)$ を考える。ただし，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ とする。

(1)　$OP=\boxed{ア}$，$PQ=\boxed{イ}$ である。また

$OQ^2=\boxed{ウ}+\boxed{エ}(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)=\boxed{ウ}+\boxed{エ}\cos\left(\boxed{オ}\theta\right)$

である。

よって，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，OQ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{カ}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる。

(2)　3点O，P，Qが一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線OPを表す方程式は $\boxed{ク}$ である。$\boxed{ク}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=0$　　①　$(\sin\theta)x+(\cos\theta)y=0$

②　$(\cos\theta)x-(\sin\theta)y=0$　　③　$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$

このことにより，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，3点O，P，Qが一直線上にあるのは

$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{ケ}}$ のときであることがわかる。

(3)　∠OQPが直角となるのは $OQ=\sqrt{\boxed{コ}}$ のときである。したがって，$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，∠OQPが直角となるのは $\theta=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi$ のときである。

2

a，b を正の実数とする。連立方程式 $(*)\begin{cases}x\sqrt{y^3}=a\\ \sqrt[3]{x}\,y=b\end{cases}$ を満たす正の実数 x，y について考えよう。

(1)　連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x，y は $x=a^{\boxed{ア}}b^{\boxed{イウ}}$，$y=a^pb^{\boxed{エ}}$ となる。ただし $p=\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ である。

(2)　$b=2\sqrt[3]{a^4}$ とする。a が $a>0$ の範囲を動くとき，連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x，y について，$x+y$ の最小値を求めよう。

$b=2\sqrt[3]{a^4}$ であるから，$(*)$ を満たす正の実数 x，y は，a を用いて $x=2^{\boxed{イウ}}a^{\boxed{クケ}}$，$y=2^{\boxed{エ}}a^{\boxed{コ}}$ と表される。したがって，相加平均と相乗平均の関係を利用すると，$x+y$ は $a=2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{サ}}$ をとることがわかる。ただし $q=\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$ である。

$\boxed{3}$

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めよう。h が 0 でないとき，

x が a から $a+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は $\boxed{\text{ア}}+\dfrac{h}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

したがって，求める微分係数は $f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{ア}}+\dfrac{h}{\boxed{\text{イ}}}\right)=\boxed{\text{エ}}$ である。

(2)　放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を C とし，C 上に点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ をとる。ただし，$a>0$ とする。

点 P における C の接線 ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{オ}}x-\dfrac{1}{\boxed{\text{カ}}}a^2$ である。直線 ℓ と x 軸

との交点 Q の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ 0\right)$ である。点 Q を通り ℓ に垂直な直線を m とする

と，m の方程式は $y=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}x+\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

直線 m と y 軸との交点を A とする。三角形 APQ の面積を S とおくと

$S=\dfrac{a\left(a^2+\boxed{\text{セ}}\right)}{\boxed{\text{ソ}}}$ となる。また，y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図

形の面積を T とおくと $T=\dfrac{a\left(a^2+\boxed{\text{タ}}\right)}{\boxed{\text{チツ}}}$ となる。

$a>0$ の範囲における $S-T$ の値について調べよう。

$$S-T=\dfrac{a\left(a^2-\boxed{\text{テ}}\right)}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。$a>0$ であるから，$S-T>0$ となるような a のとり得る値の範囲は

$a>\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。また，$a>0$ のときの $S-T$ の増減を調べると，$S-T$ は

$a=\boxed{\text{ヌ}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとることがわかる。

$\boxed{4}$

自然数 n に対し，2^n の一の位の数を a_n とする。また，数列 $\{b_n\}$ は $b_1=1$，

$b_{n+1}=\dfrac{a_nb_n}{4}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）$\cdots\cdots$ ① を満たすとする。

(1)　$a_1=2$，$a_2=\boxed{ア}$，$a_3=\boxed{イ}$，$a_4=\boxed{ウ}$，$a_5=\boxed{エ}$ である。このことから，すべての自然数 n に対して，$a_{\boxed{オ}}=a_n$ となることがわかる。$\boxed{オ}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$5n$　　①　$4n+1$　　②　$n+3$　　③　$n+4$　　④　$n+5$

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。① を繰り返し用いることにより

$b_{n+4}=\dfrac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^{\boxed{カ}}}b_n$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）が成り立つことがわかる。ここで，$a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n=3\cdot 2^{\boxed{キ}}$ であることから，$b_{n+4}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}b_n$ が成り立つ。このことから，自然数 k に対して $b_{4k-3}=\left(\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{k-1}$，$b_{4k-2}=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\left(\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{k-1}$，

$b_{4k-1}=\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\left(\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{k-1}$，$b_{4k}=\left(\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{k-1}$ である。

(3)　$S_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_j$ とおく。自然数 m に対して $S_{4m}=\boxed{タ}\left(\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^m-\boxed{チ}$ である。

(4)　積 $b_1b_2\cdots\cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$b_{4k-3}b_{4k-2}b_{4k-1}b_{4k}=\dfrac{1}{\boxed{ツ}}\left(\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{\boxed{テ}(k-1)}$ であることから，自然数 m に対して

$T_{4m}=\dfrac{1}{\boxed{ツ}^m}\left(\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^{\boxed{ト}m^2-\boxed{ナ}m}$ である。また，T_{10} を計算すると，$T_{10}=\dfrac{3^{\boxed{ニ}}}{2^{\boxed{ヌネ}}}$ である。

$\boxed{5}$

1 辺の長さが 1 のひし形 OABC において，$\angle \mathrm{AOC}=120^\circ$ とする。辺 AB を 2：1 に内分する点を P とし，直線 BC 上に点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となるようにとる。以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。

(1) 三角形 OPQ の面積を求めよう。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}$ である。実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表されるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{エ}}t\vec{a}+\vec{b}$ である。ここで，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{キ}}$ であることから，$t=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

これらのことから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

よって，三角形 OPQ の面積 S_1 は，$S_1=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

(2) 辺 BC を 1：3 に内分する点を R とし，直線 OR と直線 PQ との交点を T とする。$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表し，三角形 OPQ と三角形 PRT の面積比を求めよう。

T は直線 OR 上の点であり，直線 PQ 上の点でもあるので，実数 r，s を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=r\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と表すと，$r=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$，$s=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ となることがわかる。よって，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\vec{b}$ である。

上で求めた r，s の値から，三角形 OPQ の面積 S_1 と，三角形 PRT の面積 S_2 との比は，$S_1:S_2=\boxed{\text{ヘホ}}:2$ である。

6

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。
また，小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。
途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

(1)　袋の中に白球が4個，赤球が3個入っている。この袋の中から同時に3個の球を取り出すとき，白球の個数を W とする。確率変数 W について $P(W=0)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$，

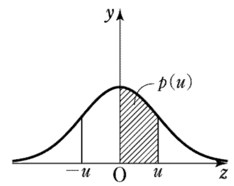
$P(W=1)=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{イウ}}}$，$P(W=2)=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{イウ}}}$，$P(W=3)=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ であり，期待値(平均)は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$，分散は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(2)　確率変数 Z が標準正規分布に従うとき $P\left(-\boxed{\text{タ}}\leqq Z\leqq\boxed{\text{タ}}\right)=0.99$ が成り立つ。$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまる最も適切なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　1.64　　①　1.96　　②　2.33　　③　2.58

(3)　母標準偏差 σ の母集団から，大きさ n の無作為標本を抽出する。ただし，n は十分に大きいとする。この標本から得られる母平均 m の信頼度(信頼係数) 95 % の信頼区間を $A\leqq m\leqq B$ とし，この信頼区間の幅 L_1 を $L_1=B-A$ で定める。
この標本から得られる信頼度 99 % の信頼区間を $C\leqq m\leqq D$ とし，この信頼区間の幅 L_2 を $L_2=D-C$ で定めると $\dfrac{L_2}{L_1}=\boxed{\text{チ}}.\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つ。また，同じ母集団から，大きさ $4n$ の無作為標本を抽出して得られる母平均 m の信頼度 95 % の信頼区間を $E\leqq m\leqq F$ とし，この信頼区間の幅 L_3 を $L_3=F-E$ で定める。このとき
$\dfrac{L_3}{L_1}=\boxed{\text{テ}}.\boxed{\text{ト}}$ が成り立つ。

正規分布表



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900