数学ⅡBC

<第1問> [1]

(1) $y=4^{x+1}$ の x と y を入れかえると $x=4^{y+1}$

∴ $y+1=\log_4 x \iff y=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}-1=\dfrac{1}{2}\log_2 x-1$

(2) $f(x)=4^{x-1}$ とする

$f(\frac{1}{2})=4^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$　　$f(1)=1$ より $y=f(x)$ は

$y=x$ 上の2点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,1)$ を通るので $g(x)$ と2点で交わる。

[2] $L=10\log_{10}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^2=20\log_{10}\dfrac{p}{p_0}$

$\dfrac{2\times10^{-5}}{2\times10^{-5}}\leqq\dfrac{p}{p_0}\leqq\dfrac{20}{2\times10^{-5}} \iff 1\leqq\dfrac{p}{p_0}\leqq10^6$

∴ $0\leqq L\leqq120$

$80=20\log_{10}\dfrac{p}{2\times10^{-5}} \iff \dfrac{p}{2\times10^{-5}}=10^4$

∴ $p=\dfrac{2}{10}=0.2$

セミが n 匹鳴いているとき

$10\log_{10}n\geqq95-80 \iff \log_{10}n\geqq1.5$

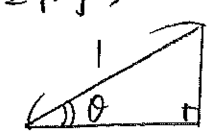
$\log_{10}31.6=\log_{10}10\times3.16=1+0.4997$

$\log_{10}31.7=\log_{10}10\times3.17=1+0.5011$

∴ 32匹以上鳴いている

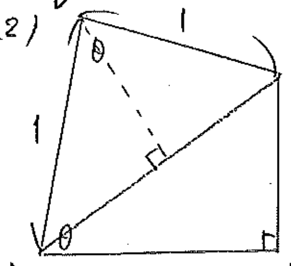
<第2問>

(1)



$AB=\cos\theta$

(2)

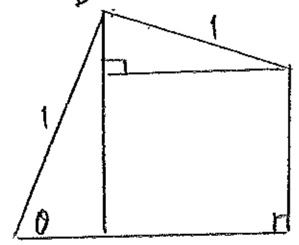


$AC=2\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\angle DAC=\dfrac{1}{2}(\pi-\theta)$ より

$\angle CAB=\theta-\dfrac{1}{2}(\pi-\theta)=\dfrac{3}{2}\theta-\dfrac{1}{2}\pi$

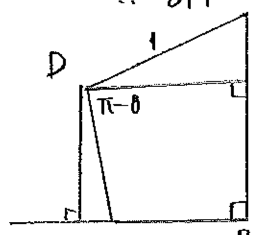
∴ $\cos\angle CAB=\cos\left(-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\theta\right)\right)=\sin\dfrac{3}{2}\theta$



$AH=\cos\theta$

$\angle CDH=\theta-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2\theta-\dfrac{\pi}{2}$

∴ $BH=\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos2\theta$



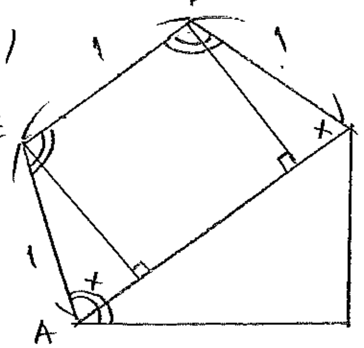
$AH=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$BH=\cos(\theta-(\pi-\theta))=\cos(2\theta-\pi)=-\cos2\theta$

$AB=BH-AH=-\cos2\theta+\cos\theta=-(2\cos^2\theta-1)+\cos\theta$

$=-2\cos^2\theta+\cos\theta+1$

(3)



□ACDE は等脚台形から "x" $=\pi-\theta$

∴ $\angle CAB=\theta-(\pi-\theta)=2\theta-\pi$ より

$AB=AC\cos(2\theta-\pi)$

$=(\cos(\pi-\theta)+1+\cos(\pi-\theta))\cos(2\theta-\pi)$

$=(-2\cos\theta+1)(-\cos2\theta)$

$=4\cos^3\theta-2\cos^2\theta-2\cos\theta+1$

<第3問>

[1] $f(x)=x^3-3x+p$

(1) $f'(x)=3x^2-3$ であり $(a,\ a^3-3a+p)$ における接線は

$f'(a)=3a^2-3$ より

$y=(3a^2-3)(x-a)+a^3-3a+p=\underline{(3a^2-3)x-2a^3+p}$ …①

(2) ①が $(1,1)$ を通るとき

(i) $1=3a^2-3-2a^3+p \iff \underline{2a^3-3a^2+4=p}$

$g(x)=2x^3-3x^2+4$ とおくと $g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$

グラフの概形は③

(ii) $p<3$ のとき 1本, $p=3,4$ のとき 2本, $3<p<4$ のとき 3本

$4<p$ のとき 1本 から 正しいものは ①と④

[2] $f(x)=x^2+\int_0^2(x-t)f(t)\,dt$ …①

(1) $f(x)=x^2+x\int_0^2 f(t)\,dt-\int_0^2 t f(t)\,dt$

$\int_0^2 f(t)\,dt=a$, $\int_0^2 t f(t)\,dt=b$ とおくと

$f(t)=t^2+at-b$

$\therefore\ a=\int_0^2(t^2+at-b)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-bt\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}+2a-2b$

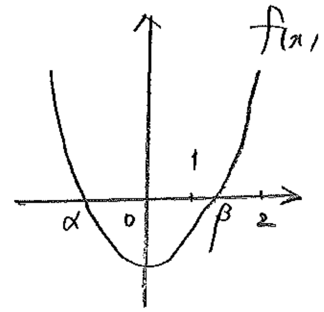
$\therefore\ \underline{3a-6b+8=0}$

$b=\int_0^2(t^3+at^2-bt)\,dt=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{a}{3}t^3-\frac{b}{2}t^2\right]_0^2$

$=4+\frac{8}{3}a-2b$ $\qquad\therefore\ \underline{8a-9b+12=0}$

$\therefore\ \underline{a=0,\ b=\frac{4}{3}}$

(2) $f(x)=x^2-\frac{4}{3}=0 \iff x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$



$g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)\,dt=-\int_\alpha^0 f(t)\,dt>0$

$g(0)=0$

$g(\beta)=\int_0^\beta f(t)\,dt<0$

$g(1)=\int_0^1 f(t)\,dt<0$ $\qquad\therefore\ g(\beta)<g(1)$

$a=0$ から $g(2)=0$ $\qquad$ $\underline{正しいのは ⓪と④}$

<第4問> $S_n = 2n^2 - a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$

$n=1$を代入すると $a_1 = 2 - a_1 \iff \underline{a_1 = 1}$

$n=2$を代入すると $a_1 + a_2 = 8 - a_2 \iff 2a_2 = 8 - a_1 = 7$

$\therefore \underline{a_2 = \frac{7}{2}}$

$a_{n+1} = 2(n+1)^2 - a_{n+1} - (2n^2 - a_n)$

$\iff 2a_{n+1} = a_n + 2(n^2+2n+1) - 2n^2$

$\iff \underline{a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2n + 1}$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと $\underline{b_1 = a_2 - a_1 = \frac{5}{2}}$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2n + 1$

$-)\ a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + 2n + 3$

$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + 2 \quad \therefore \underline{b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 2}$

$b_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(b_n - 4)$

$b_n - 4 = (b_1 - 4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \iff b_n = 4 - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= \underline{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} = 1 + 4(n-1) - \frac{\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$= 4n - 3 - 3\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$= \underline{4n - 6 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

<第5問>

(1) (i) $Z = \frac{X-35}{4.8}$ とする.

$P(X \geqq 41) = P\left(Z \geqq \frac{6}{4.8}\right) = P(Z \geqq 1.25) = \underline{0.1056}$

(ii) Yの平均は $35 \times 9 + 2 = \underline{317.0}$

標準偏差は $\sqrt{4.8^2 \times 9} = 4.8 \times 3 = \underline{14.4}$

(2) (i) $38 - 1.96 \times \frac{4.8}{\sqrt{100}} \leqq m \leqq 38 + 1.96 \times \frac{4.8}{\sqrt{100}}$

$38 - 0.9408 \leqq m \leqq 38 + 0.9408$

$37.0592 \leqq m \leqq 38.9408$ ③

(ii) 帰無仮説「この農園で生産されるいちご1個の重さの母平均は地区全体の平均と同じである」⓪とし.

対立仮説②とする。

帰無仮説が正しいとすると $\overline{X}$ は平均37, 標準偏差 $\frac{4.8}{\sqrt{100}} = 0.48$ の正規分布に従うので

$U = \frac{\overline{X}-37}{0.48}$ とおくと $N(0,1)$ に従う。

$P(|U| \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$ から有意水準5%の棄却域は

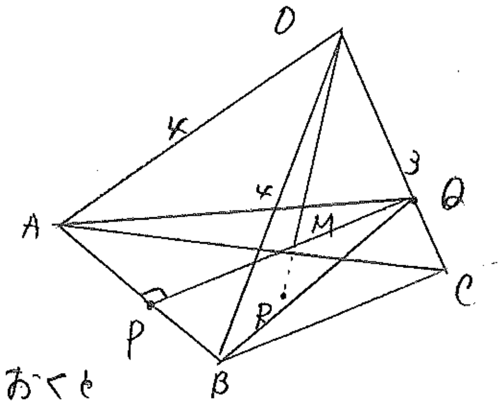
$|U| > 1.96$ である。

$\overline{X} = 38$ のとき $U = \frac{1}{0.48} = 2.08\cdots$ から

帰無仮説は棄却される

$\therefore$ 地区全体の平均と $\underline{\text{異なるといえる}}$

<第6問>



$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\times4\times\cos60^\circ = \underline{8}$

$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 4\times3\times\cos60^\circ = \underline{6}$

$\vec{OP} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b},\quad \vec{OQ} = t\vec{c}$ とおくと

$|\vec{PQ}|^2 = \left|t\vec{c} - \{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\}\right|^2 = \left|-(1-s)\vec{a} - s\vec{b} + t\vec{c}\right|^2$

$= (1-s)^2|\vec{a}|^2 + s^2|\vec{b}|^2 + t^2|\vec{c}|^2 + 2s(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\quad - 2t(1-s)\vec{a}\cdot\vec{c} - 2st\,\vec{b}\cdot\vec{c}$

$= (4s-2)^2 + (3t-2)^2 + 8$

$\therefore |\vec{PQ}|$ が最小となるのは $s = \frac{1}{2},\ t = \frac{2}{3}$ のときで

このとき $\underline{|\vec{PQ}| = 2\sqrt{2}}$　　$\vec{PQ} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$

$\vec{PQ}\cdot\vec{AB} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right)\cdot(\vec{b} - \vec{a})$

$= \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 + \frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{c} = \underline{0}$

$\vec{AQ}\cdot\vec{OC} = \left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{a}\right)\cdot\vec{c} = \frac{2}{3}|\vec{c}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{c} = \underline{0}$

$\triangle QAB = \frac{1}{2}\times AB\times PQ = \frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2} = \underline{4\sqrt{2}}$

$PQ \perp OC$ より 四面体 OABC の体積 $= 4\sqrt{2}\times3\times\frac{1}{3} = \underline{4\sqrt{2}}$

R は OM 上にあるので

$\vec{OR} = k\vec{OM} = \frac{k}{2}(\vec{OP} + \vec{OQ}) = \frac{k}{2}\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} + \frac{2}{3}\vec{c}\right)$

$= \frac{k}{4}\vec{a} + \frac{k}{4}\vec{b} + \frac{k}{3}\vec{c}\ \cdots\ (*)$

$\vec{CR} = m\vec{CA} + n\vec{CB}$ より

$\vec{OR} - \vec{OC} = m(\vec{a} - \vec{c}) + n(\vec{b} - \vec{c})$

$\therefore \vec{OR} = m\vec{a} + n\vec{b} + (1-m-n)\vec{c}\ \cdots\ (**)$

$(*)$, $(**)$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立なので

$\frac{k}{4} = m$ かつ $\frac{k}{4} = n$ かつ $\frac{k}{3} = 1-m-n$

$\therefore k = \frac{6}{5},\ m = \frac{3}{10},\ n = \frac{3}{10}$ から

$\vec{OR} = \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$

<第7問>

[1] $y^2=2(x-1)=4\times\frac{1}{2}(x-1)$

焦点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$　準線 $x=\frac{1}{2}$

[2] $(x-y)^2=2\sqrt{2}(x+y)-4$ … ①

(1) $x^2-2(y+\sqrt{2})x+y^2-2\sqrt{2}y+4=0$ … ②

$\frac{D}{4}=(y+\sqrt{2})^2-(y^2-2\sqrt{2}y+4)=4\sqrt{2}y-2\geqq 0$ のとき

$y\geqq\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

②において $y=\frac{\sqrt{2}}{4}$ を代入すると

$x^2-\frac{5}{2}\sqrt{2}x+\frac{25}{8}=0 \iff \left(x-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2=0$

(2) $X+iY=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)(x+iy)$

$=\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)(x+iy)$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\times(x+iy)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)+\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)i$

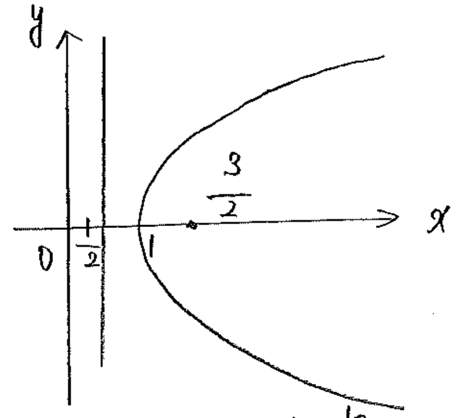
∴ $X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\iff x+y=\sqrt{2}X$

$Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)\iff x-y=-\sqrt{2}Y$

①に代入して　$2Y^2=4X-4$

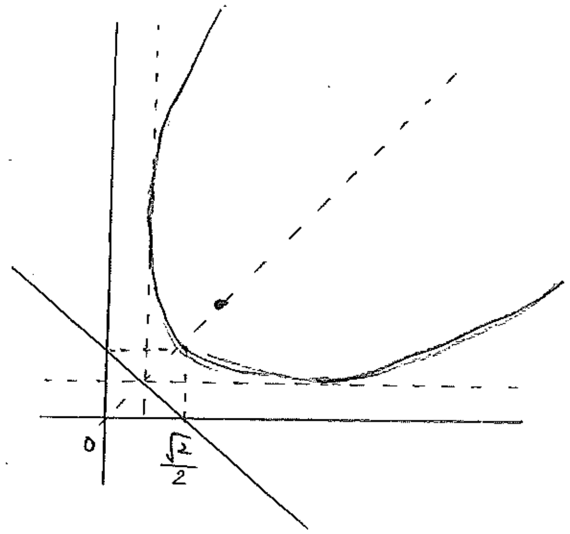
$Y^2-2X+2=0$

(3)



[1] の放物線

45°回転



$\left(\frac{3}{2},0\right)$ を原点のまわりに45°回転した点は

$\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}i$ から 点 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

準線は $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ を通り傾き -1 の直線になるので

$y=-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}$

$=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}$