数学II・B・C　第３回　（100点満点）

（解答・配点）

問題番号（配点）	解答記号（配点）	正解	自採点欄
第１問（15）	ア (2)	④	
	イ (2)	④	
	ウ，エ (2)	3，4	
	$\frac{オ}{カ}$ (2)	$\frac{7}{8}$	
	キ (3)	④	
	ク，ケ，コ (2)	②，③，④	
	サ，シ，ス (2)	④，②，③	
小　計			
第２問（15）	ア，イ (2)	2，1	
	ウ (1)	5	
	エ，オ (2)	2，2	
	カ (2)	①	
	キ (2)	2	
	ク (3)	⑦	
	ケ (3)	④	
小　計			
第３問（22）	ア，イ (2)	2，6	
	$\frac{ウ}{エ}$ (1)	$\frac{1}{3}$	
	$\frac{オ}{カ}$ (2)	$\frac{2}{9}$	
	$\frac{キ}{クケコ}$ (2)	$\frac{8}{243}$	
	$\frac{サ}{シ}$ (3)	$\frac{8}{9}$	
	－ス，セ (1)	－1，3	
	ソ (2)	⑤	
	タ (2)	⑤	
	チ，ツ (2)	5，7	
	$\frac{テ}{ト}$ (2)	$\frac{2}{3}$	
	$\frac{ナニ}{ヌ}$ (1)	$\frac{32}{3}$	
	ネノ (2)	13	
小　計			
第４問（16）	ア，イ，ウ (2)	4，8，8	
	エ (1)	⓪	
	オ (1)	②	
	カ (1)	②	
	キ，ク，ケ (2)	6，2，8	
	コ (2)	⑧	
	サ (2)	⑦	
	シ (2)	④	
	ス，セ (1)	2，2	
	ソ，タ，チ (2)	3，⓪，2	
小　計			

問題番号（配点）	解答記号（配点）	正解	自採点欄
第５問（16）	ア (1)	5	
	$\frac{イ}{ウ}$ (1)	$\frac{5}{3}$	
	エ (1)	③	
	オ (2)	⓪	
	カ (2)	③	
	キ (2)	⑥	
	ク (2)	2	
	ケ，コ (1)	②，③	
	サ，シ (1)	⑤，②	
	ス (1)	①	
	セ (1)	⓪	
	ソ (1)	⓪	
小　計			
第６問（16）	$\frac{ア}{イ}$ (1)	$\frac{2}{3}$	
	$\frac{ウ}{エ}$ (1)	$\frac{1}{3}$	
	オ (2)	②	
	カ$\leqq k \leqq$キ (2)	$1 \leqq k \leqq 3$	
	ク$\leqq k \leqq$ケ (2)	$3 \leqq k \leqq 4$	
	コ (2)	④	
	サ，シ (2)	②，⓪	
	ス (2)	⑦	
	セ$< k <$ソ (2)	$0 < k < 2$	
小　計			
第７問（16）	ア (1)	②	
	イ，ウ，エ，オ (2)	①，①，⓪，③	
	カ (1)	③	
	キ (1)	⓪	
	ク (1)	④	
	ケ (1)	⓪	
	コサ$\sqrt{シ}$ (1)	$10\sqrt{3}$	
	スセ$\sqrt{ソ}$＋タi (2)	$-4\sqrt{3}+6i$	
	チ$\sqrt{ツ}$ (1)	$4\sqrt{3}$	
	テ$\sqrt{ト}$＋ナi (2)	$-\sqrt{3}+5i$	
	$\frac{\pi}{ニ}$ (1)	$\frac{\pi}{3}$	
	ヌネ$\sqrt{ノ}$ (2)	$25\sqrt{3}$	
小　計			
合　計			

（注）　第１問，第２問，第３問は必答。第４問～第７問のうちから３問選択。計６問を解答。

解　説

第1問　(数学II　三角関数)

Ⅲ $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$　【難易度…★★】

$(\sin^2x+\cos^2x)^2=\sin^4x+2\sin^2x\cos^2x+\cos^4x$ より

$$f(x)=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x \quad (④)$$
$$=1-2\sin^2x\cos^2x \quad \cdots\cdots①$$

2倍角の公式より

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta \iff \sin\theta\cos\theta=\frac{\sin2\theta}{2}$$
$$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta \iff \sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

これを①に用いて

$$f(x)=1-2\left(\frac{\sin2x}{2}\right)^2$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^22x \quad (④)$$
$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos4x}{2}$$
$$=\frac{\cos4x+\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$
$$=\frac{1}{4}\cos4x+\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots②$$

となる。

(1)　②より

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{3}{4}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}$$

(2)　②より，$y=f(x)$ のグラフは

「$y=\cos4x$ のグラフを

y 軸方向に $\frac{1}{4}$ 倍に縮小し，

y 軸方向に $\frac{3}{4}$ だけ平行移動したもの」

である。よって

・$x=0$ で最大

・正の周期で最小のものは $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

以上より，最も適当なグラフの概形は④である。

(3)　②より，$f(x)$ の最大値が1，最小値が $\frac{7}{8}$ となるとき

$$\cos4x \text{ の最大値が } 1 \quad \cdots\cdots(\text{A})$$
$$\cos4x \text{ の最小値が } \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(\text{B})$$

x の変域が $\alpha\leqq x\leqq\beta$ より

$$4\alpha\leqq4x\leqq4\beta$$

である。また，$0<\alpha<\beta<\pi$ より

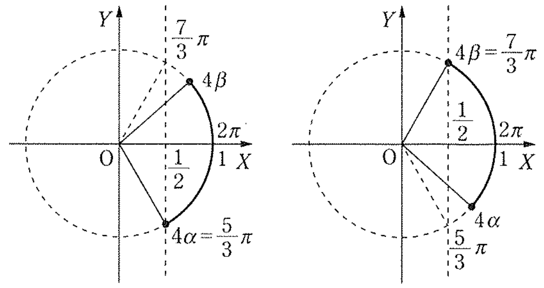
$$0<4\alpha<4\beta<4\pi$$

である。よって，(A)より，$4\alpha\leqq2\pi\leqq4\beta$ である。

ここで，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ を満たし，2π に最も近い θ は

$$\theta=2\pi\pm\frac{\pi}{3}$$
$$\therefore\ \theta=\frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi$$

であることに注意すると，(A)，(B)を満たす $4\alpha\leqq4x\leqq4\beta$ は次の図の実線部である。



・$4\alpha=\frac{5}{3}\pi$ かつ $2\pi\leqq4\beta\leqq\frac{7}{3}\pi$　すなわち

$$\alpha=\frac{5}{12}\pi \text{ かつ } \frac{\pi}{2}\leqq\beta\leqq\frac{7}{12}\pi \quad (②,\ ③,\ ④)$$

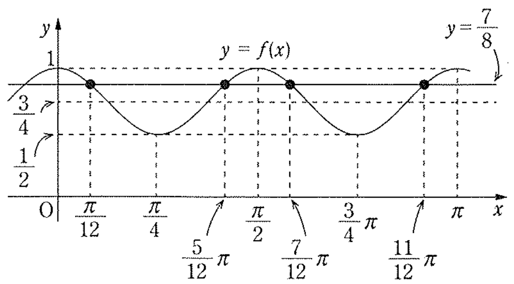
または

・$4\beta=\frac{7}{3}\pi$ かつ $\frac{5}{3}\pi\leqq4\alpha\leqq2\pi$　すなわち

$$\beta=\frac{7}{12}\pi \text{ かつ } \frac{5}{12}\pi\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2} \quad (④,\ ②,\ ③)$$

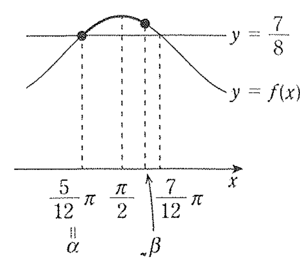
である。

(注)　(2)の $y=f(x)$ のグラフで考えると，次のようになっている。



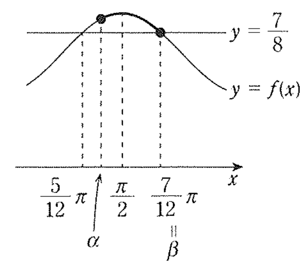
・$\alpha=\frac{5}{12}\pi$ かつ

$$\frac{\pi}{2}\leqq\beta\leqq\frac{7}{12}\pi$$



・$\beta=\frac{7}{12}\pi$ かつ

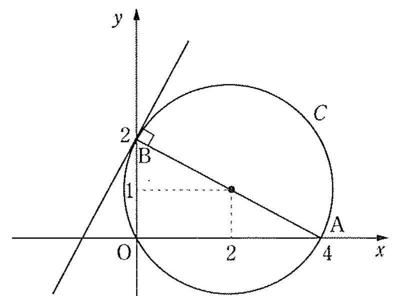
$$\frac{5}{12}\pi\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$$



第2問　(数学II　図形と方程式)

Ⅱ $\boxed{2}\boxed{4}\boxed{6}$　【難易度…★】

(1)



$\angle\text{AOB}=90°$ より，円 C は線分 AB を直径とする円である。C の中心は線分 AB の中点(2，1)，半径は

$$\frac{1}{2}\text{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{5}$$

よって，C の方程式は

$$(x-\mathbf{2})^2+(y-\mathbf{1})^2=\mathbf{5}$$

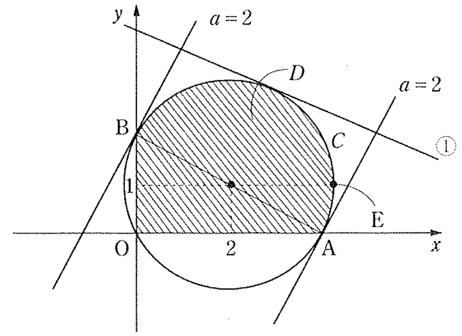
直線 AB の傾きは $-\frac{1}{2}$ であるから，B における接線の傾きは2である。よって，点 B における C の接線の方程式は

$$y=\mathbf{2}x+\mathbf{2}$$

(2)(i)　不等式 $(x-2)^2+(y-1)^2\leqq5$ の表す領域は，円 C の周および内部であり

$$xy\geqq0 \iff \begin{cases}x\geqq0\\y\geqq0\end{cases} \text{ または } \begin{cases}x\leqq0\\y\leqq0\end{cases}$$

であるから，不等式 $xy\geqq0$ の表す領域は，第1象限，第3象限および x 軸，y 軸である。したがって，領域 D は下図の斜線部分である。ただし，境界を含む(⓪)。



(ii)　$y-ax=k$ とおくと

$$y=ax+k \quad \cdots\cdots①$$

であり，①は傾き a，y 切片 k の直線を表す。

点$(x,\ y)$が D 内を動くとき，直線①と D が共有点をもつような k のとり得る値の最大値を考える。

(1)より，点 A，B における C の接線の傾きは2であることに注意する。

・$a<2$ のとき

図のように点 $\text{E}(2+\sqrt{5},\ 1)$ をとると，直線①が円 C の O を含まない弧 BE(両端を除く)の部分と接するとき，k は最大になる。このとき

(C の中心と①の距離)＝(半径)

であり，①は $ax-y+k=0$ であるから

$$\frac{|2a-1+k|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

C の中心(2，1)は直線①の下側，すなわち $y<ax+k$ の表す領域にあるので

$$1<2a+k \quad \therefore\ 2a-1+k>0$$

ゆえに

$$\frac{2a-1+k}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5}$$
$$k=-2a+1+\sqrt{5(a^2+1)}$$

・$a\geqq2$ のとき

直線①が点 B(0，2)を通るとき k は最大になる。

このとき

$$k=2$$

よって

$a<\mathbf{2}$ のとき　$M=-2a+1+\sqrt{5(a^2+1)}$　(⑦)

$a\geqq2$ のとき　$M=2$　(④)

第3問 （数学II 微分・積分の考え）

V $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{6}$ 【難易度…〔1〕★，〔2〕★】

〔1〕

太郎さんの箱は，縦の長さが x，横の長さが $2x$ であるから，高さを y とすると

$$x+2x+y=1$$
$$y=1-3x$$

$x>0$，$y>0$ より $0<x<\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

このとき

$$V=x\cdot 2x\cdot y=2x^2(1-3x)$$
$$=\boldsymbol{2x^2-6x^3}$$
$$V'=4x-18x^2=2x(2-9x)$$

$0<x<\frac{1}{3}$ における V の増減は，次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{9}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{3}\right)$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

よって，V が最大になる x の値は $x=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$ であり

$$最大値\ V_1=2\left(\frac{2}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{8}{243}}$$

花子さんの箱の縦，横の長さを x，高さを y とすると

$$x+x+y=1$$
$$y=1-2x$$

$x>0$，$y>0$ より $0<x<\frac{1}{2}$ であり，箱の体積を V とすると

$$V=x\cdot x\cdot y=x^2(1-2x)$$
$$=x^2-2x^3$$
$$V'=2x-6x^2=2x(1-3x)$$

$0<x<\frac{1}{2}$ における V の増減は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

よって，V が最大になる x の値は $x=\frac{1}{3}$ であり

$$最大値\ V_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

したがって

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{8}{243}}{\frac{1}{27}}=\boldsymbol{\frac{8}{9}}$$

〔2〕
$$f(x)=x^3-2x+1$$
$$g(x)=x^3-x^2+4$$

$f(x)=g(x)$ のとき

$$x^3-2x+1=x^3-x^2+4$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$
$$\therefore\ x=-1,\ 3$$

よって $\alpha=\boldsymbol{-1}$，$\beta=\boldsymbol{3}$

(1) $f'(x)=3x^2-2$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$-1<-\sqrt{\frac{2}{3}}<\sqrt{\frac{2}{3}}<3$ であるから，$-1<x<3$ の範囲で $f(x)$ は極大値と極小値の両方をとる(⑤)。

$g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$ より，$g(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$-1<0<\frac{2}{3}<3$ であるから，$-1<x<3$ の範囲で $g(x)$ は極大値と極小値の両方をとる(⑤)。

(2) $f(-1)=2$，$f'(-1)=1$ より，C_1 上の点 $(-1,\ 2)$ における接線 ℓ_1 の方程式は

$$y=(x+1)+2=x+3$$

$g(-1)=2$，$g'(-1)=5$ より，C_2 上の点 $(-1,\ 2)$ における接線 ℓ_2 の方程式は

$$y=5(x+1)+2=\boldsymbol{5x+7}$$

ℓ_1，ℓ_2 の傾きは，それぞれ 1，5 であるから

$$\tan\theta=\left|\frac{5-1}{1+5\cdot 1}\right|=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(注) ℓ_1，ℓ_2 が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると

$$\tan\theta_1=1,\ \tan\theta_2=5\ \left(0<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{2}\right)$$

であり，$\theta=\theta_2-\theta_1$ である。よって

$$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)$$
$$=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$
$$=\frac{5-1}{1+5\cdot 1}$$
$$=\frac{2}{3}$$

(3)
$$g(x)-f(x)=-x^2+2x+3$$
$$=-(x+1)(x-3)\quad\cdots\cdots①$$

であるから

$$\int_{-1}^{3}\{g(x)-f(x)\}dx=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$$
$$=\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3$$
$$=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

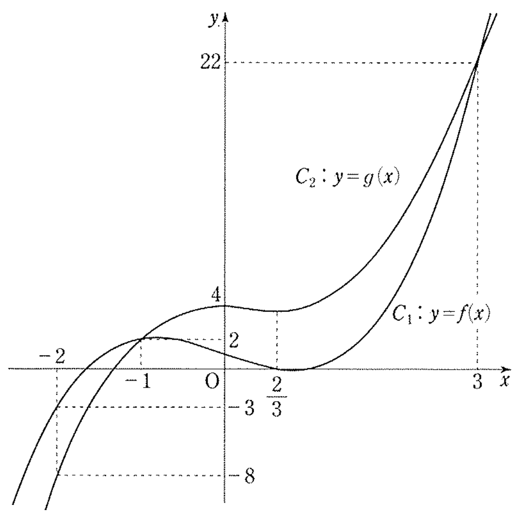
$$\int_{-2}^{-1}\{g(x)-f(x)\}dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-2}^{-1}$$
$$=-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}$$
$$=-\frac{7}{3}$$

①より

$-1<x<3$ において $g(x)>f(x)$

$x<-1$，$3<x$ において $f(x)>g(x)$

であるから，C_1 と C_2 の概形は次のようになる。



求める面積は

$$\int_{-2}^{-1}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{-1}^{3}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=-\left(-\frac{7}{3}\right)+\frac{32}{3}$$
$$=\boldsymbol{13}$$

第4問 （数学B 数列）

VI $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{4}$ 【難易度…★★】

(1) 毎回1回目と同じ方向に折ると，折り目の辺の対辺に重なっている紙の枚数は1ずつ増えていくから

$$a_{n+1}=a_n+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ。

また，折り目の辺の両隣りの辺に重なっている紙の枚数はそれぞれ2倍になるから

$$\begin{cases} b_{n+1}=2b_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ c_{n+1}=2c_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

が成り立つ。

$$a_2=3,\ b_2=4,\ c_2=4$$

であるから

$$a_3=\boldsymbol{4},\ b_3=\boldsymbol{8},\ c_3=\boldsymbol{8}$$

数列 $\{a_n\}$ は，公差1の等差数列である(⓪)。

数列 $\{b_n\}$ は，公比2の等比数列である(②)。

数列 $\{c_n\}$ は，公比2の等比数列である(②)。

(2) $n+1$ 回目は n 回目と違う方向に折ったとき，折り目の辺の対辺に重なっている紙の枚数は b_n+c_n，折り目の辺の両隣りの辺に重なっている紙の枚数のうち，多くない方の枚数は2，もう一方の枚数は $2a_n$ であるから

$$\begin{cases} a_{n+1}=b_n+c_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)(⑧)\cdots\cdots① \\ b_{n+1}=2 & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)(⑦)\cdots\cdots② \\ c_{n+1}=2a_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)(④)\cdots\cdots③ \end{cases}$$

が成り立つ。

$$a_2=4,\ b_2=2,\ c_2=4$$

であるから

$$\begin{cases} a_3=b_2+c_2=\boldsymbol{6} \\ b_3=\boldsymbol{2} \\ c_3=2a_2=\boldsymbol{8} \end{cases}$$

毎回違う方向に折ると，①より

$$a_{n+2}=b_{n+1}+c_{n+1}$$

であるから，②，③を代入して

$$a_{n+2}=\boldsymbol{2a_n+2}\quad\cdots\cdots(*)$$

$n=2m$ とおくと

$$a_{2m+2}=2a_{2m}+2$$

よって，$d_m=a_{2m}$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと

$$d_{m+1}=2d_m+2$$

より

$$d_{m+1}+2=2(d_m+2)$$

数列 $\{d_m+2\}$ は公比2の等比数列であるから

$$d_m+2=(d_1+2)\cdot 2^{m-1}$$

$d_1=a_2=4$ であるから

$$d_m+2=6\cdot 2^{m-1}=3\cdot 2^m$$

$$\therefore\quad d_m=\mathbf{3\cdot 2^m-2}\quad (⓪)$$

(注) (*)で，$n=2m-1$ とおくと

$$a_{2m+1}=2a_{2m-1}+2$$

両辺を2倍して

$$2a_{2m+1}=2\cdot 2a_{2m-1}+4$$

③より

$$c_{2m+2}=2c_{2m}+4$$

$e_m=c_{2m}$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと

$$e_{m+1}=2e_m+4$$

より

$$e_{m+1}+4=2(e_m+4)$$

数列 $\{e_m+4\}$ は公比2の等比数列であるから

$$e_m+4=(e_1+4)\cdot 2^{m-1}$$

$e_1=c_2=4$ であるから

$$e_m+4=8\cdot 2^{m-1}=2^{m+2}$$

$$\therefore\quad e_m=2^{m+2}-4$$

第5問 (数学B 統計的な推測)

Ⅶ 2 3 5 6 7 8 【難易度…★】

(1) 確率変数 X は二項分布 $B(100,\ 0.5)$ に従うので

平均(期待値) $E(X)=100\cdot 0.5=50$

標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{100\cdot 0.5\cdot(1-0.5)}=5$

確率変数 Y は二項分布 $B(100,\ 0.1)$ に従うので

平均(期待値) $E(Y)=100\cdot 0.1=10$

標準偏差 $\sigma(Y)=\sqrt{100\cdot 0.1\cdot(1-0.1)}=3$

よって

$$\frac{E(X)}{E(Y)}=\frac{50}{10}=\mathbf{5}$$

$$\frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}=\mathbf{\frac{5}{3}}$$

標本の大きさ100は十分に大きいので，X は近似的に正規分布 $N(50,\ 5^2)$ に従う。さらに確率変数 Z' を

$$Z'=\frac{X-50}{5}$$

とおくと，Z' は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X\leqq 48$ のとき

$$Z'\leqq\frac{48-50}{5}=-0.4$$

であるから

$$\begin{aligned}p_1&=P(X\leqq 48)\\&=P(Z'\leqq -0.4)\\&=0.5-P(0\leqq Z'\leqq 0.4)\end{aligned}$$

正規分布表より

$$P(0\leqq Z'\leqq 0.4)=0.1554$$

であるから

$$p_1=0.5-0.1554=0.3446\fallingdotseq 0.345\quad (③)$$

また，Y は近似的に正規分布 $N(10,\ 3^2)$ に従うので，確率変数 U を

$$U=\frac{Y-10}{3}$$

とおくと，U は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$Y\geqq 7$ のとき

$$U\geqq\frac{7-10}{3}=-1$$

であるから

$$\begin{aligned}p_2&=P(Y\geqq 7)\\&=P(U\geqq -1)\\&=0.5+P(0\leqq U\leqq 1)\end{aligned}$$

$P(0\leqq U\leqq 1)>0$ より $p_1<0.5<p_2$ であるから

$$p_1<p_2\quad (⓪)$$

(2) 母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は，標本の大きさを n としたとき

$$350-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq 350+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

である。

$n=100$，$\sigma=100$ のとき

$$C_1=350-1.96\cdot\frac{100}{\sqrt{100}}=330.40\quad (③)$$

$$C_2=350+1.96\cdot\frac{100}{\sqrt{100}}=369.60\quad (⑥)$$

であり

$$C_2-C_1=2\cdot 1.96\cdot\frac{100}{\sqrt{100}}=39.2$$

また，$n=100$，$\sigma=200$ のとき

$$D_1=350-1.96\cdot\frac{200}{\sqrt{100}}$$

$$D_2=350+1.96\cdot\frac{200}{\sqrt{100}}$$

であり

$$D_2-D_1=2\cdot 1.96\cdot\frac{200}{\sqrt{100}}\ (=78.4)$$

よって

$$D_2-D_1=\mathbf{2}(C_2-C_1)$$

(3) 帰無仮説を「今年の睡眠時間の母平均 m は昨年と同じである」，すなわち「m は370である」(②)とし，対立仮説を「今年の睡眠時間の母平均 m は昨年とは異なる」，すなわち「m は370ではない」(③)とする。

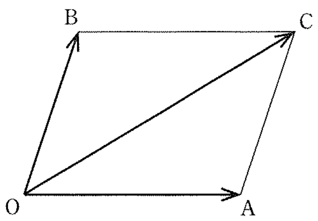
帰無仮説が正しいとすると，W は平均370，標準偏差 $\dfrac{80}{\sqrt{100}}=8$ の正規分布 $N(370,\ 8^2)$ (⑤，②)に近似的に従うので，$Z=\dfrac{W-370}{8}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より，$P(|Z|\leqq 1.96)\fallingdotseq 0.95$ (⓪)であるから有意水準5%の棄却域は $|Z|>1.96$ である。

$W=350$ のとき $Z=\dfrac{350-370}{8}=-2.5$ (⓪)であり，この値は棄却域に入るので，帰無仮説は棄却できる。よって，この高校の生徒の平日の睡眠時間は昨年と異なるといえる(⓪)。

第6問 (数学C ベクトル)

Ⅷ 4 5 6 【難易度…★★】



(1) Pは

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ 3x+y=2\end{cases}$$

を満たしながら動く。

A′は直線OA上の点であるから，$y=0$ であり

$$3x+0=2,\ すなわち\ x=\frac{2}{3}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\mathbf{\frac{2}{3}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

である。また，B′は直線BC上の点であるから，$y=1$ であり

$$3x+1=2,\ すなわち\ x=\frac{1}{3}$$

より

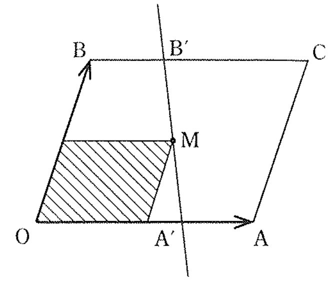
$$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\mathbf{\frac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。

Mは線分A′B′の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

である。



点Mを通り2直線OA，OBそれぞれと平行な2本の直線と辺OA，OBで囲まれた平行四辺形の面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1&=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}\\&=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}\\&=\frac{1}{4}S\quad (②)\end{aligned}$$

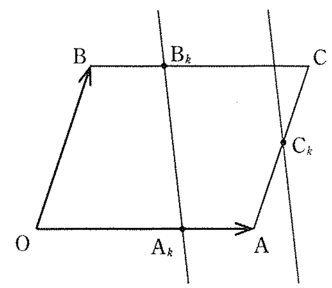
である。

(2) Pは

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ 3x+y=k\end{cases}\quad\cdots\cdots①$$

を満たしながら動く。

(i)



直線 ℓ_k と直線OAの交点を A_k とおく。点Pと点 A_k が一致する条件は $y=0$ であり，①より

$$3x+0=k,\ すなわち\ x=\frac{k}{3}$$

である。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}=\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから，点 A_k が辺OA上にある条件は

$$0\leqq\frac{k}{3}\leqq 1$$

すなわち

$$0\leqq k\leqq 3\quad\cdots\cdots③$$

である。

直線 ℓ_k と直線BCの交点を B_k とおく。点Pと点 B_k が一致する条件は $y=1$ であり，①より

$$3x+1=k,\ \text{すなわち}\ x=\frac{k-1}{3}$$

である。よって

$$\overrightarrow{OB_k}=\frac{k-1}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

であるから，点 B_k が辺BC上にある条件は

$$0\leqq\frac{k-1}{3}\leqq 1$$

すなわち

$$1\leqq k\leqq 4 \quad\cdots\cdots④$$

である。

直線 ℓ_k と直線ACの交点を C_k とおく。点Pと点 C_k が一致する条件は $x=1$ であり，①より

$$3\cdot 1+y=k,\ \text{すなわち}\ y=k-3$$

である。よって

$$\overrightarrow{OC_k}=\overrightarrow{OA}+(k-3)\overrightarrow{OB}$$

であるから，点 C_k が辺AC上にある条件は

$$0\leqq k-3\leqq 1$$

すなわち

$$3\leqq k\leqq 4 \quad\cdots\cdots⑤$$

である。

以上から，直線 ℓ_k が2辺OA，BCの両方と共有点をもつような k の値の範囲は

③ かつ ④

すなわち

$1\leqq k\leqq 3$

であり，直線 ℓ_k が2辺BC，ACの両方と共有点をもつような k の値の範囲は

④ かつ ⑤

すなわち

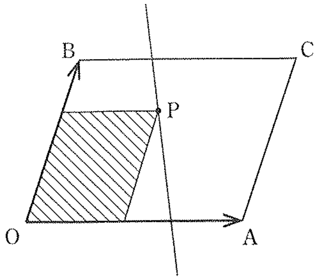
$3\leqq k\leqq 4$

である。

(ii) ②のとき，点Pを通り2直線OA，OBそれぞれと平行な2本の直線と，辺OA，OBで囲まれた平行四辺形の面積 S_2 は

$$\begin{aligned}S_2&=|x\overrightarrow{OA}||y\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB\\&=xy|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle AOB\\&=xyS \quad (④)\end{aligned}$$

である。よって，S_2 が最大となるのは xy が最大となるときである。



x，y は①を満たしながら変化するから，$y=k-3x$ より

$$\begin{aligned}xy&=x(k-3x)\\&=-3x^2+kx\\&=-3\left(x-\frac{k}{6}\right)^2+\frac{k^2}{12}\end{aligned}$$

である。$x>0$，$y>0$ より $k>0$ であるから，xy は $x=\frac{k}{6}$ のとき最大値 $\frac{k^2}{12}$ をとる。このとき

$$y=k-3\cdot\frac{k}{6}=\frac{k}{2}$$

である。以上より，S_2 は

$$\overrightarrow{OP}=\frac{k}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{2}\overrightarrow{OB} \quad (②,\ ⓪)$$

のとき，最大値

$$\frac{k^2}{12}S \quad (⑦)$$

をとる。

点Pが平行四辺形OACBの内部の点である条件は

$0<x<1$ かつ $0<y<1$

である。よって，S_2 を最大にする点Pが平行四辺形OACBの内部の点となるような k の値の範囲は

$$\begin{cases}0<\dfrac{k}{6}<1\\[2mm]0<\dfrac{k}{2}<1\end{cases}$$

すなわち

$0<k<2$

である。

（注） x，y は②を満たすから，相加平均と相乗平均の関係を用いて S_2 の最大値を求めることもできる。

x，y は①も満たすから

$$\frac{3x+y}{2}\geqq\sqrt{3x\cdot y}$$

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2\geqq 3xy$$

$$xy\leqq\frac{k^2}{12}$$

である。また，等号が成り立つのは

$$3x=y$$

のときであり，①とあわせると

$$3x=y=\frac{k}{2}$$

すなわち

$$x=\frac{k}{6},\ y=\frac{k}{2}$$

である。

よって，S_2 は

$$\overrightarrow{OP}=\frac{k}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{2}\overrightarrow{OB}$$

のとき，最大値

$$\frac{k^2}{12}S$$

をとる。

第7問

〔1〕（数学C　平面上の曲線）

Ⅸ 1 2 3 4　【難易度…★★】

$$C: ax^2+(a-1)y^2+2y=1 \quad\cdots\cdots①$$

(1) $0<a<1$ のとき，$a-1<0$ より，C は双曲線である(②)。

(2) $a\neq 1$ のとき，①の両辺を $a(a-1)$ で割ると

$$\frac{x^2}{a-1}+\frac{y^2}{a}+\frac{2y}{a(a-1)}=\frac{1}{a(a-1)}$$

$$\frac{x^2}{a-1}+\frac{\left(y+\frac{1}{a-1}\right)^2}{a}=\frac{1}{a(a-1)}+\frac{1}{a(a-1)^2}$$

右辺を整理すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(a-1)}+\frac{1}{a(a-1)^2}&=\frac{a-1}{a(a-1)^2}+\frac{1}{a(a-1)^2}\\&=\frac{a}{a(a-1)^2}=\frac{1}{(a-1)^2}\end{aligned}$$

よって，C の方程式は

$$\frac{x^2}{a-1}+\frac{\left(y+\frac{1}{a-1}\right)^2}{a}=\frac{1}{(a-1)^2}$$

(①，①，⓪，③)

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a-1}}+\frac{\left(y+\frac{1}{a-1}\right)^2}{\frac{a}{(a-1)^2}}=1$$

$a>1$ のとき，C は楕円であり

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a}{(a-1)^2}-\frac{1}{a-1}}&=\sqrt{\frac{a}{(a-1)^2}-\frac{a-1}{(a-1)^2}}\\&=\sqrt{\frac{1}{(a-1)^2}}=\frac{1}{a-1}\end{aligned}$$

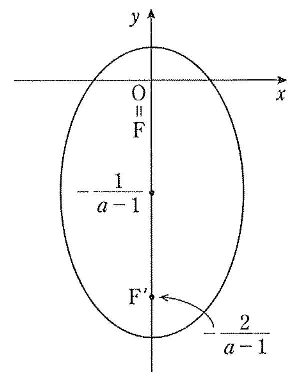
よって，$\frac{a}{(a-1)^2}>\frac{1}{a-1}>0$ であり，焦点は y 軸上にあるから，F，F′の座標は

$$\left(0,\ -\frac{1}{a-1}\pm\frac{1}{a-1}\right)=(0,\ 0),\ \left(0,\ -\frac{2}{a-1}\right)$$

したがって

$$FF'=\frac{2}{a-1} \quad (③)$$

直線FF′の方程式は　$x=0$　(⓪)



$0<a<1$ のとき，C は双曲線であり，$1-a>0$ に注意して，C の方程式は

$$\frac{x^2}{\frac{1}{1-a}}-\frac{\left(y+\frac{1}{a-1}\right)^2}{\frac{a}{(1-a)^2}}=-1$$

となるので，焦点は y 軸上にある。

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{1-a}+\frac{a}{(1-a)^2}}&=\sqrt{\frac{1-a}{(1-a)^2}+\frac{a}{(1-a)^2}}\\&=\sqrt{\frac{1}{(1-a)^2}}=\frac{1}{1-a}\end{aligned}$$

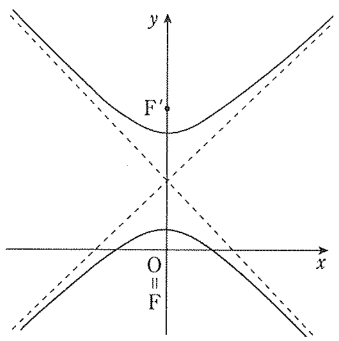
であるから，F，F′の座標は

$$\left(0,\ -\frac{1}{a-1}\pm\frac{1}{1-a}\right)=(0,\ 0),\ \left(0,\ \frac{2}{1-a}\right)$$

したがって

$$FF'=\frac{2}{1-a} \quad (④)$$

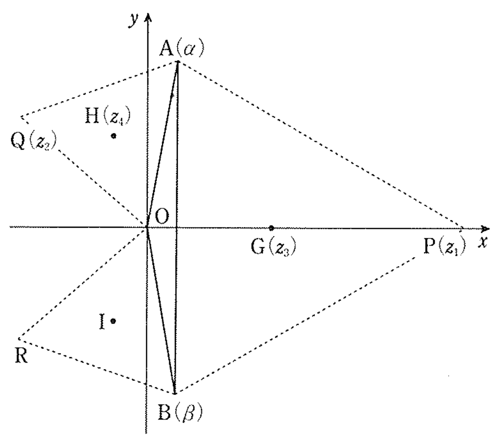
直線FF′の方程式は　$x=0$　(⓪)



〔2〕（数学C　複素数平面）

X $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{5}$　　【難易度…★】

$\alpha=\sqrt{3}+9i$，$\beta=\sqrt{3}-9i$ とおけば，α，β を表す点がそれぞれ A，B であり A は第1象限の点である。また，A と B は実軸に関して対称な位置にある。



(1)　P は実軸上にあるから z_1 は実数である。また，AP=BP であるから，△ABP が正三角形となる条件は

$$AB=AP$$

である。いま

$$\begin{aligned}AB&=|\alpha-\beta|\\&=|(\sqrt{3}+9i)-(\sqrt{3}-9i)|\\&=|18i|\\&=18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AP&=|z_1-\alpha|\\&=|z_1-(\sqrt{3}+9i)|\\&=|(z_1-\sqrt{3})-9i|\\&=\sqrt{(z_1-\sqrt{3})^2+81}\end{aligned}$$

であるから

$$18=\sqrt{(z_1-\sqrt{3})^2+81}$$

$$(z_1-\sqrt{3})^2+81=324$$

$$(z_1-\sqrt{3})^2=243$$

$$z_1-\sqrt{3}=\pm 9\sqrt{3}$$

ここで，$z_1>0$ であるから

$$z_1=\mathbf{10\sqrt{3}}$$

（注）　線分 AB の中点を M$(\sqrt{3})$ とする。△ABP は正三角形であるから

$$MP=\sqrt{3}AM=9\sqrt{3}$$

よって

$$z_1=\sqrt{3}+9\sqrt{3}=10\sqrt{3}$$

△AOQ が正三角形であることから Q は A を O のまわりに $\frac{\pi}{3}$ 回転した点であり

$$\begin{aligned}z_2&=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3}+9i)\\&=\mathbf{-4\sqrt{3}+6i}\end{aligned}$$

である。次に G は △ABP の重心であるから

$$\begin{aligned}z_3&=\frac{\alpha+\beta+z_1}{3}\\&=\frac{(\sqrt{3}+9i)+(\sqrt{3}-9i)+10\sqrt{3}}{3}\\&=\mathbf{4\sqrt{3}}\end{aligned}$$

であり，H は △AOQ の重心であるから

$$\begin{aligned}z_4&=\frac{\alpha+z_2}{3}\\&=\frac{(\sqrt{3}+9i)+(-4\sqrt{3}+6i)}{3}\\&=\mathbf{-\sqrt{3}+5i}\end{aligned}$$

である。

(2)
$$\begin{aligned}z_4-z_3&=(-\sqrt{3}+5i)-4\sqrt{3}\\&=-5\sqrt{3}+5i\\&=10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\&=10\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\end{aligned}$$

であるから

$$|z_4-z_3|=10$$

z_4-z_3 の偏角は　$\frac{5}{6}\pi$

である。

ゆえに

$$\begin{aligned}\angle HGO&=\pi-\frac{5}{6}\pi\\&=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

であり，H と I は実軸に関して対称であるから

$$\begin{aligned}\angle HGI&=2\angle HGO\\&=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

となり，△GHI は正三角形であることがわかる。1辺の長さが a の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ であるから，△GHI の面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 10^2=\mathbf{25\sqrt{3}}$$

である。

（注）　H と I は実軸に関して対称であり，線分 HI の中点を N$(-\sqrt{3})$ とすると

$$HN=5,\ GN=4\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=5\sqrt{3}$$

であるから

$$\angle HGN=\frac{\pi}{6}$$