高2理系数学総合S　確認テスト　冬期第4講

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点　　／　10

$\boxed{1}$ （(1) 6点　(2) 4点）

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ の値を求めよ。

(2)　3 以上の整数 n に対して，不等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}dx < \frac{\pi}{6}$ が成り立つことを示せ。

高2理系数学総合S　確認テスト　冬期第4講【解答】

$\boxed{1}$ （(1) 6点　(2) 4点）

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$　　(2)　略

$\boxed{1}$ （(1) 6点　(2) 4点）

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ において，$x=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \to \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot\cos\theta\, d\theta$$ 」3点

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$ 」3点

(2)　$n \geqq 3$ のとき，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (<1) において，$0 \leqq x^n \leqq x^2$ であるから

$$0 \leqq \frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}} \leqq \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$ 」2点

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}dx \leqq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}<\frac{\pi}{6}$　」2点