【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材②

中１甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｋ「平方根・２次方程式」
数学Ｔ「三平方の定理」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の $\boxed{}$ に当てはまる数を入れなさい。

(1) 1 の平方根は $\boxed{}$　(2) $-\sqrt{1}=\boxed{}$　(3) $\sqrt{(-13)^2}=\boxed{}$

(4) $-\sqrt{0.3^2}=\boxed{}$　(5) $\sqrt{\dfrac{25}{169}}=\boxed{}$　(6) $-(-\sqrt{0.4})^2=\boxed{}$

$\boxed{2}$

次の数を，大きい方から順に並べなさい。

$$1.7,\quad \sqrt{3},\quad -\sqrt{2},\quad 0,\quad -1\frac{1}{2},\quad (-0.4)^2$$

$\boxed{3}$

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{48}-2\sqrt{27}+\dfrac{6}{\sqrt{3}}-2$　(2) $\sqrt{27}-6\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{18}-4}{\sqrt{2}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{8}+3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}-\sqrt{54}-\dfrac{4-\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$

$\boxed{4}$

次の式を，分母を有理化して簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$　(2) $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$

$\boxed{5}$

次の計算をしなさい。

(1) $(2\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+3)^2$　(2) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$

(3) $(5-2\sqrt{6})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$　(4) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$

(5) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

(6) $\dfrac{1}{12}\{(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})^2\}$

$\boxed{6}$

$\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a，b，b^2+ab+4 の値を求めよ。

$\boxed{7}$

$\sqrt{120-4a}$ が整数となる自然数 a は全部でいくつあるか答えなさい。

$\boxed{8}$

(1) $11\leqq\sqrt{a}<12$ を満たすような自然数 a の個数を求めなさい。

(2) $\sqrt{2^3\times3^4\times5\times6^3\times7^3\times a}$ が自然数となるような自然数 a のうち，最も小さいものを求めなさい。

(3) $\sqrt{\dfrac{936}{x}}$ が自然数となるような自然数 x のうち，最も小さいものを求めなさい。

$\boxed{9}$

次の 2 次方程式を解きなさい。

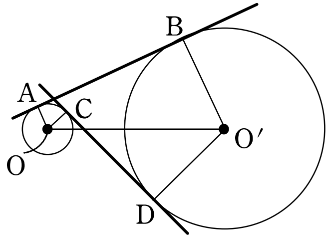
(1) $(2x-1)(x-1)=x(2-x)$　(2) $\dfrac{x^2-2}{2}-\dfrac{x^2-5x}{3}=3$

$\boxed{10}$

x の 2 次方程式 $x^2-4ax+a^2+12=0$ の解の 1 つは，2 次方程式 $x^2+4x-21=0$ の小さい方の解より 5 大きい。このとき，定数 a の値を求めなさい。

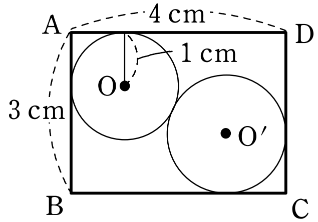
11

右の図において，A，B，C，D は，2 つの円 O，O′ の共通接線の接点である。円 O，O′ の半径がそれぞれ 1 cm，4 cm，中心間の距離が 7 cm であるとき，線分 AB と CD の長さをそれぞれ求めなさい。



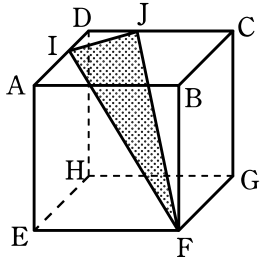
12

右の図のように，長方形 ABCD の 2 辺 AB，AD に接する半径 1 cm の円 O がある。AB＝3 cm，AD＝4 cm とする。2 辺 BC，CD と円 O に接する円 O′ の半径を求めなさい。



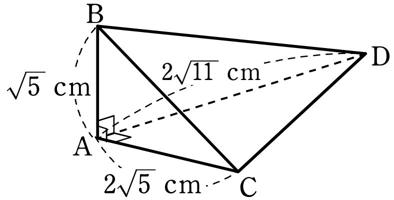
13

1 辺の長さが 6 cm の立方体 ABCD－EFGH の辺 AD，CD 上にそれぞれ点 I，J を DI＝DJ＝2 cm になるようにとる。このとき，△IJF の面積を求めなさい。



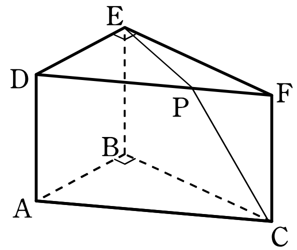
14

三角錐 ABCD において，AB＝$\sqrt{5}$ cm，AC＝$2\sqrt{5}$ cm，AD＝$2\sqrt{11}$ cm，∠BAC＝∠CAD＝∠DAB＝90° である。このとき，頂点 A から △BCD に引いた垂線の長さを求めなさい。



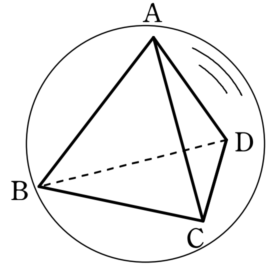
15

右の図は，底面が AB＝15 cm，BC＝20 cm，∠ABC＝90° の直角三角形で，AD＝16 cm の三角柱である。頂点 E から C へ，辺 DF 上の点 P を通る糸をかける。糸の長さが最も短くなるとき，その長さを求めなさい。



16

1 辺の長さが 12 cm の正四面体 ABCD のすべての頂点が 1 つの球面の上にある。このとき，その球の半径を求めなさい。



【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　(1)　1 と -1　(2)　-1　(3)　13　(4)　-0.3　(5)　$\dfrac{5}{13}$　(6)　-0.4

$\boxed{2}$

解答　$\sqrt{3}$，1.7，$(-0.4)^2$，0，$-\sqrt{2}$，$-1\dfrac{1}{2}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　-2　(2)　$15\sqrt{2}-7\sqrt{3}$　(3)　$3\sqrt{2}-4$　(4)　$\sqrt{2}-\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　(2)　$2+\sqrt{2}-\sqrt{6}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$-2-10\sqrt{2}$　(2)　$\sqrt{2}$　(3)　6　(4)　$10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$

(5)　$4\sqrt{2}+4\sqrt{6}$　(6)　$\sqrt{5}+\sqrt{7}$

$\boxed{6}$

解答　$a=5$，$b=2\sqrt{2}-2$，$b^2+ab+4=6+2\sqrt{2}$

$\boxed{7}$

解答　6 個

$\boxed{8}$

解答　(1)　23　(2)　$a=105$　(3)　$x=26$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$　(2)　$x=2$，-12

$\boxed{10}$

解答　$a=-4$

$\boxed{11}$

解答　$\mathrm{AB}=2\sqrt{10}$ cm，$\mathrm{CD}=2\sqrt{6}$ cm

$\boxed{12}$

解答　$(6-2\sqrt{6})$ cm

$\boxed{13}$

解答　$2\sqrt{43}$ cm^2

$\boxed{14}$

解答　$\dfrac{\sqrt{33}}{3}$ cm

$\boxed{15}$

解答　$4\sqrt{65}$ cm

$\boxed{16}$

解答　$3\sqrt{6}$ cm

$\boxed{1}$

解説

(1)　1 の平方根は　1 と -1　　(2)　$-\sqrt{1}=-1$

(3)　$\sqrt{(-13)^2}=\sqrt{13^2}=13$　　(4)　$-\sqrt{0.3^2}=-0.3$

(5)　$\sqrt{\dfrac{25}{169}}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$　　(6)　$-(-\sqrt{0.4})^2=-0.4$

$\boxed{2}$

解説

1.7，$\sqrt{3}$，$(-0.4)^2$ は正の数，$-\sqrt{2}$，$-1\dfrac{1}{2}$ は負の数である。

$1.7=\sqrt{1.7^2}=\sqrt{2.89}$，　$(-0.4)^2=0.16=\sqrt{0.16^2}=\sqrt{0.0256}$

$0.0256<2.89<3$ であるから　$\sqrt{0.0256}<\sqrt{2.89}<\sqrt{3}$

すなわち　$(-0.4)^2<1.7<\sqrt{3}$

また　$1\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}$

$2<\dfrac{9}{4}$ であるから　$\sqrt{2}<\sqrt{\dfrac{9}{4}}$　すなわち　$\sqrt{2}<\dfrac{3}{2}$

よって　　$-\sqrt{2}>-1\dfrac{1}{2}$

したがって，6 つの数を大きい方から順に並べると

$$\sqrt{3},\quad 1.7,\quad (-0.4)^2,\quad 0,\quad -\sqrt{2},\quad -1\frac{1}{2}$$

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $\sqrt{48}-2\sqrt{27}+\dfrac{6}{\sqrt{3}}-2=4\sqrt{3}-6\sqrt{3}+\dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-2$

$$=-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2=-2$$

(2) $\sqrt{27}-6\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-6\left(\dfrac{5\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\dfrac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right)+\sqrt{\dfrac{54}{3}}$

$$=3\sqrt{3}-6\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{2}\right)+\sqrt{18}$$

$$=3\sqrt{3}-10\sqrt{3}+12\sqrt{2}+3\sqrt{2}$$

$$=15\sqrt{2}-7\sqrt{3}$$

(3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{18}-4}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\dfrac{(3\sqrt{2}-4)\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$$=\frac{3\sqrt{2}-3}{3}-\frac{6-4\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{2}-1-(3-2\sqrt{2})=3\sqrt{2}-4$$

別解　$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{18}-4}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{9}-2\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

$$=\sqrt{2}-1-(3-2\sqrt{2})=3\sqrt{2}-4$$

(4) $\dfrac{\sqrt{8}+3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}-\sqrt{54}-\dfrac{4-\sqrt{12}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(2\sqrt{2}+3\sqrt{6})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-3\sqrt{6}-\dfrac{(4-2\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$$=\frac{2\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{3}-3\sqrt{6}-\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}}{3}+3\sqrt{2}-3\sqrt{6}-(2\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

$$=\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$\boxed{4}$

(解説)

(1) 与式$)=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}-\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$$=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{3-1}-\frac{\sqrt{15}-3}{5-3}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

(2) (与式)$=\dfrac{4\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}$

$$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

$$=2+\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

$\boxed{5}$

(解説)

(1) $(2\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+3)^2=(2\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}\times1+1^2-\{(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times3+3^2\}$

$$=8-4\sqrt{2}+1-(2+6\sqrt{2}+9)$$

$$=-2-10\sqrt{2}$$

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{4}-\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{4}$

$$=\frac{(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times1+1^2}{4}-\frac{(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times1+1^2}{4}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

別解　$\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$

$$=\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$$

(3) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2=(3\sqrt{2})^2+2\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2$

$=18+12\sqrt{6}+12=6(5+2\sqrt{6})$

よって　$(5-2\sqrt{6})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2=(5-2\sqrt{6})\times 6(5+2\sqrt{6})$

$=6\{5^2-(2\sqrt{6})^2\}$

$=6(25-24)=6$

(4)　$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}^2$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$

$=2+2\sqrt{6}+3-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}+5$

$=10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$

別解　$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$

$=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times(-\sqrt{5})+2(-\sqrt{5})\times\sqrt{2}$

$=2+3+5+2\sqrt{6}-2\sqrt{15}-2\sqrt{10}$

$=10+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$

(5)　$(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

$=\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\times\{(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}\}\{(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}\}$

$=\{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2\}\{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\}$

$=(1+2\sqrt{2}+2-3)(1+2\sqrt{3}+3-2)$

$=2\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})=4\sqrt{2}+4\sqrt{6}$

(6)　$\dfrac{1}{12}\{(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})^2\}$

$=\dfrac{1}{12}[\{(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21})+(\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})\}$

$\times\{(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{21})-(\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{21})\}]$

$=\dfrac{1}{12}\times 2\sqrt{3}\times 2(\sqrt{15}+\sqrt{21})$

$=\dfrac{1}{3}(3\sqrt{5}+3\sqrt{7})=\sqrt{5}+\sqrt{7}$

$\boxed{6}$

解説

$$\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=\frac{3+2\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2}=3+2\sqrt{2}$$

$2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ であり，$4<8<9$ であるから　$2<\sqrt{8}<3$

よって　$3+2<3+2\sqrt{2}<3+3$

すなわち，$3+2\sqrt{2}$ の整数部分 a は　$a=5$

また，小数部分 b は　$b=3+2\sqrt{2}-a=2\sqrt{2}-2$

ゆえに　$b^2+ab+4=b(b+a)+4$

$=(2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+3)+4$

$=8+2\sqrt{2}-6+4=6+2\sqrt{2}$

$\boxed{7}$

解説

$$\sqrt{120-4a}=\sqrt{2^2\times(30-a)}$$

これが整数となるとき　$30-a=n^2$　(n は 0 以上の整数)

すなわち　$a=30-n^2$

の形に表される。

a は自然数であるから，n は 0 以上 5 以下の整数である。

よって，a は全部で

$5-0+1=6$ (個)

$\boxed{8}$

解説

(1)　$11=\sqrt{121}$，$12=\sqrt{144}$ であるから　$\sqrt{121}\leqq\sqrt{a}<\sqrt{144}$

よって　$121\leqq a<144$

a は自然数であるから　$121\leqq a\leqq 143$

よって，求める自然数 a の個数は　$143-121+1=23$

(2)　$\sqrt{2^3\times 3^4\times 5\times 6^3\times 7^3\times a}$ が自然数となるのは，$2^3\times 3^4\times 5\times 6^3\times 7^3\times a$ が自然数の 2 乗になるときである。

自然数の 2 乗になるためには，$2^3\times3^4\times5\times6^3\times7^3\times a$ を素因数分解したときに，すべての指数が偶数になっている必要がある。

$2^3\times3^4\times5\times6^3\times7^3\times a=2^6\times3^7\times5\times7^3\times a$ であるから，このような条件を満たす a で最も小さいものは

$$a=3\times5\times7=105$$

(3)　$\sqrt{\dfrac{936}{x}}$ が自然数となるのは，$\dfrac{936}{x}$ が自然数の 2 乗になるときである。

自然数の 2 乗になるためには，$\dfrac{936}{x}$ を素因数分解したときに，すべての指数が偶数になっている必要がある。

$\dfrac{936}{x}=\dfrac{2^3\times3^2\times13}{x}$ であるから，このような条件を満たす x で最も小さいものは

$$x=2\times13=26$$

9

解説

(1)　$(2x-1)(x-1)=x(2-x)$

$2x^2-3x+1=2x-x^2$

整理すると　$3x^2-5x+1=0$

よって　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times3\times1}}{2\times3}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$　答

(2)　$\dfrac{x^2-2}{2}-\dfrac{x^2-5x}{3}=3$

両辺に 6 をかけて　$3(x^2-2)-2(x^2-5x)=18$

$3x^2-6-2x^2+10x=18$

整理すると　$x^2+10x-24=0$

左辺を因数分解すると　$(x-2)(x+12)=0$

よって　$x=2,\ -12$　答

10

解説

$x^2+4x-21=0$ を解くと　$(x+7)(x-3)=0$

よって　$x=-7,\ 3$

したがって，$x^2-4ax+a^2+12=0$ の解の 1 つは $-7+5$，すなわち -2 であるから

$(-2)^2-4a\times(-2)+a^2+12=0$

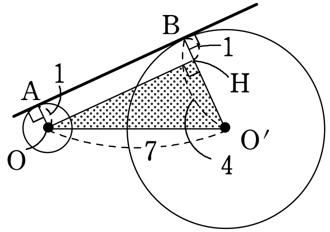
すなわち　$a^2+8a+16=0$

よって　$(a+4)^2=0$

したがって　$a=-4$

11

解説



O から線分 O′B に垂線 OH を引くと，四角形 AOHB は長方形であるから

AO＝BH　……①

AB＝OH　……②

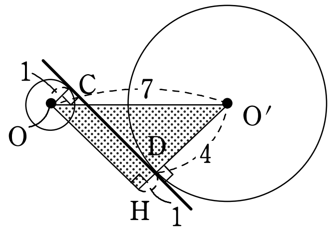
① から　O′H＝BO′－BH＝4－1＝3

直角三角形 OO′H において　$3^2+\mathrm{OH}^2=7^2$

よって　$\mathrm{OH}^2=40$

OH＞0 であるから　$\mathrm{OH}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

② から　$\mathrm{AB}=\mathrm{OH}=2\sqrt{10}$（cm）



O から線分 O′D の延長に垂線 OH′ を引くと，四角形 OH′DC は長方形であるから

CO＝DH′　……③

CD＝OH′　……④

③ から　O′H′＝O′D＋DH′＝4＋1＝5

直角三角形 OO′H′ において　$5^2+\mathrm{OH}'^2=7^2$

よって　$\mathrm{OH}'^2=24$

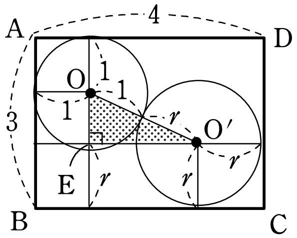
OH′＞0 であるから　$\mathrm{OH}'=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

④ から　$\mathrm{CD}=\mathrm{OH}'=2\sqrt{6}$（cm）

12

解説

円 O′ の半径を r cm とする。
また，O を通り辺 AB に平行な直線と，O′ を通り辺 BC に平行な直線の交点を E とする。



2 つの円 O，O′ は外接しているから

$$OO' = r+1$$

また，図から　$OE = 3-1-r = 2-r$　…… ①

$O'E = 4-1-r = 3-r$　…… ②

直角三角形 OEO′ において

$$(2-r)^2+(3-r)^2=(r+1)^2$$

すなわち　$r^2-12r+12=0$

これを解くと　$r=\dfrac{12\pm\sqrt{96}}{2}=6\pm2\sqrt{6}$

①，② から　$r<2$

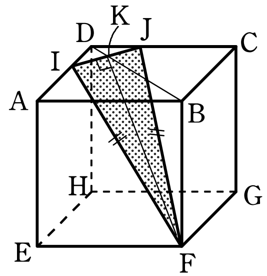
したがって　$r=6-2\sqrt{6}$

答　$(6-2\sqrt{6})$ cm

13

解説

△FIJ は FI＝FJ の二等辺三角形である。
また，直角三角形 DIJ において，$DI : DJ : IJ = 1 : 1 : \sqrt{2}$ であるから



$$IJ = DI\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$　…… ①

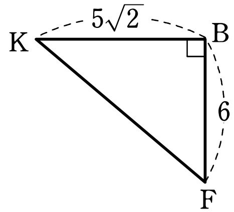
F から辺 IJ に垂線 FK を引くと，K は線分 BD，IJ の交点である。
直角三角形 BFK において

$$FK^2 = BF^2+BK^2 = 6^2+BK^2$$　…… ②

ここで　$BK = BD-DK$

$$= AD\times\sqrt{2} - DI\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 6\sqrt{2}-\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$



①，② から　$FK^2 = 36+(5\sqrt{2})^2 = 86$

FK＞0 であるから　$FK=\sqrt{86}$

よって，△IJF の面積は

$$\frac{1}{2}\times IJ\times FK = \frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{86} = 2\sqrt{43}\ (\text{cm}^2)$$

14

解説

三角錐 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times AB\times AC\right)\times AD = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}\right)\times2\sqrt{11}$$

$$=\frac{10\sqrt{11}}{3}$$　…… ①

直角三角形 ABC，ACD，ADB において

$$BC=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=5$$

$$CD=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{11})^2}=8$$

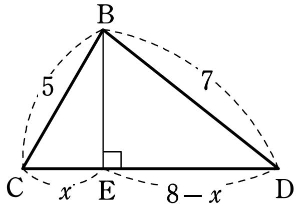
$$BD=\sqrt{(2\sqrt{11})^2+(\sqrt{5})^2}=7$$

△BCD において，頂点 B から辺 CD に垂線 BE を引く。

CE＝x cm とおくと，直角三角形 BCE，BDE において

$$BE^2=BC^2-CE^2=5^2-x^2$$

$$BE^2=BD^2-DE^2=7^2-(8-x)^2$$



よって　$5^2-x^2=7^2-(8-x)^2$

すなわち　$x=\dfrac{5}{2}$

したがって　$BE^2=5^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{75}{4}$

BE＞0 であるから　$BE=\sqrt{\dfrac{75}{4}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

よって，△BCD の面積は　$\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$　……②

頂点 A から △BCD に引いた垂線を AH とすると，三角錐の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times AH$$

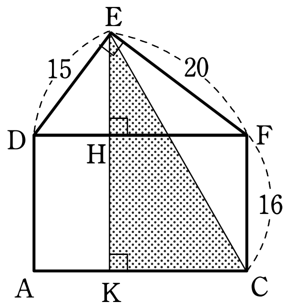
①，② から　$\dfrac{10\sqrt{11}}{3}=\dfrac{1}{3}\times 10\sqrt{3}\times AH$

よって　$AH=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$　　答　$\dfrac{\sqrt{33}}{3}$ cm

15

解説

右の図のように，面 EDF，DACF を含む展開図を考えると，最も短くなるときの糸の長さは，線分 EC の長さと等しい。



直角三角形 EDF において

$$DF^2=15^2+20^2$$

$$=(5\times 3)^2+(5\times 4)^2=5^2\times 25$$

DF＞0 であるから

$$DF=\sqrt{5^2\times 25}=5\sqrt{25}=25$$

頂点 E から線分 DF に垂線 EH を引くと，

△EDF∽△HEF であるから　EF：HF＝DF：EF

すなわち　20：HF＝25：20　　よって　HF＝16

また　DE：EH＝DF：EF

すなわち　15：EH＝25：20　　よって　EH＝12

線分 EH の延長と辺 AC の交点を K とすると，△EKC は直角三角形であるから

$$EC^2=EK^2+KC^2=(EH+FC)^2+FH^2$$

$$=(12+16)^2+16^2=(4\times 7)^2+(4\times 4)^2$$

$$=4^2\times 65$$

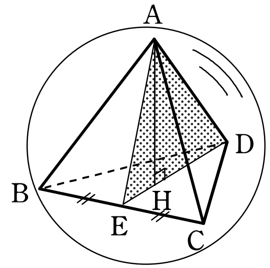
EC＞0 であるから　$EC=\sqrt{4^2\times 65}=4\sqrt{65}$

よって，求める糸の長さは　$4\sqrt{65}$ cm

16

解説

辺 BC の中点を E とする。また，頂点 A から底面 BCD に垂線 AH を引く。



△ABC，△BCD は正三角形であるから

$$AE=DE=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

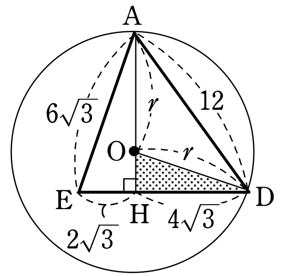
H は △BCD の重心であるから

$$EH=\frac{1}{3}\times 6\sqrt{3}=2\sqrt{3},\ DH=\frac{2}{3}\times 6\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

直角三角形 AEH において

$$AH^2=(6\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2=96$$

AH＞0 であるから　$AH=4\sqrt{6}$



球の中心を O とし，球の半径を r cm とすると，直角三角形 ODH において

$$OH^2+HD^2=OD^2$$

すなわち　$(4\sqrt{6}-r)^2+(4\sqrt{3})^2=r^2$

よって　$8\sqrt{6}\,r=144$

したがって　$r=\dfrac{144}{8\sqrt{6}}=3\sqrt{6}$ (cm)

参考　球の中心 O は，高さ AH を 3：1 に内分している。

これは，1 辺の長さが 12 cm の正四面体のすべての面に接するような球の中心と一致している。