【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材②

中２六甲数学

【注意事項】

本教材は

数学１「数と式」
数学２「円」の後半，「三平方の定理」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

(1) $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ を計算せよ。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

$\boxed{2}$

2 重根号をはずして，次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$　　(2) $\sqrt{11-\sqrt{112}}$　　(3) $\sqrt{10+5\sqrt{3}}$

$\boxed{3}$

$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$a+2b+b^2$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$

$x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$　　(2) xy　　(3) x^2+y^2　　(4) x^3+y^3

$\boxed{5}$

次の方程式を解け。

(1) $|x+5|=3$　　(2) $2|x-1|=3x$

$\boxed{6}$

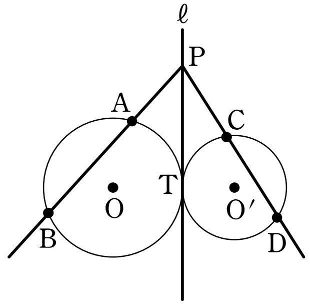
次の不等式を解け。

(1) $|x+3|\leqq 2$　　(2) $|x-4|>3$

(3) $3|x+1|<x+5$

$\boxed{7}$

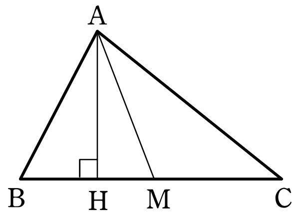
右の図のように，点 T で直線 ℓ に接する 2 つの円 O，O′ がある。また，図のように，ℓ 上に T と異なる点 P をとり，P を通る 2 直線と円 O，O′ との交点を，それぞれ A，B，C，D とする。
このとき，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にあることを証明しなさい。



$\boxed{8}$

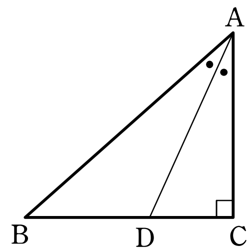
△ABC において，$AB=2\sqrt{5}$ cm，BC＝7 cm，$CA=\sqrt{41}$ cm である。頂点 A から辺 BC に垂線 AH を引き，辺 BC の中点を M とする。このとき，次の線分の長さを求めなさい。

(1) AH　　(2) AM



$\boxed{9}$

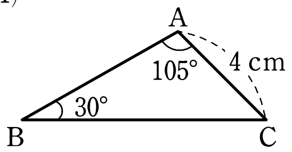
∠C＝90° である直角三角形 ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，BD＝3 cm，CD＝2 cm となった。
このとき，線分 AD の長さを求めなさい。



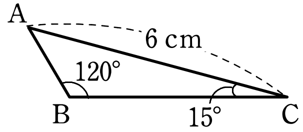
10

次の図で，辺 BC，AB の長さと △ABC の面積を求めなさい。

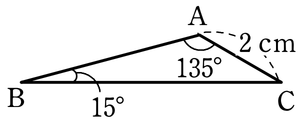
(1)



(2)



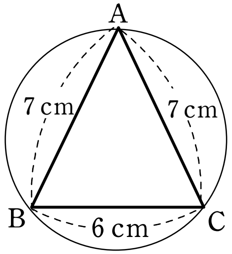
(3)



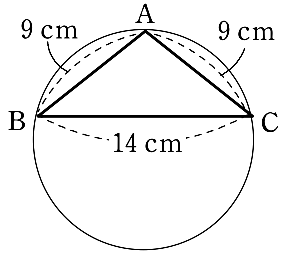
11

右の図の二等辺三角形 ABC について，外接円の半径を求めなさい。

(1)

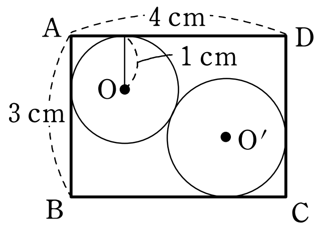


(2)



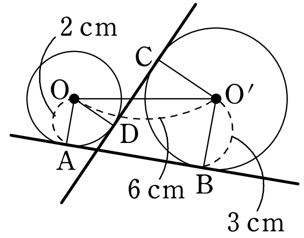
12

右の図のように，長方形 ABCD の 2 辺 AB，AD に接する半径 1 cm の円 O がある。AB＝3 cm，AD＝4 cm とする。2 辺 BC，CD と円 O に接する円 O′ の半径を求めなさい。



13

右の図において，A，B，C，D は，2 つの円 O，O′ の共通接線の接点である。円 O，O′ の半径がそれぞれ 2 cm，3 cm，中心間の距離が 6 cm であるとき，線分 AB と CD の長さをそれぞれ求めなさい。



14

半径 4 cm の円 O と半径 r cm ($r>4$) の円 O′ があり，OO′＝9 cm である。

(1) 円 O が円 O′ に内接するとき，r の値を求めなさい。

(2) 2 つの円が異なる 2 点で交わるとき，r の値の範囲を求めなさい。

【解答＆解説】

1

解答 (1) $\sqrt{7}-2$ (2) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

2

解答 (1) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{7}-2$ (3) $\dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}}{2}$

3

解答 5

4

解答 (1) 4 (2) 1 (3) 14 (4) 52

5

解答 (1) $x=-2,\ -8$ (2) $x=\dfrac{2}{5}$

6

解答 (1) $-5\leqq x\leqq -1$ (2) $x<1,\ 7<x$ (3) $-2<x<1$

7

解答 略

8

解答 (1) 4 cm (2) $\dfrac{\sqrt{73}}{2}$ cm

9

解答 $2\sqrt{6}$ cm

10

解答 (1) $BC=(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})$ cm，$AB=4\sqrt{2}$ cm，$\triangle ABC=(4\sqrt{3}+4)$ cm^2

(2) $BC=2\sqrt{6}$ cm，$AB=(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$ cm，$\triangle ABC=(9-3\sqrt{3})$ cm^2

(3) $BC=(2\sqrt{3}+2)$ cm，$AB=(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ cm，$\triangle ABC=(\sqrt{3}+1)$ cm^2

11

解答 (1) $\dfrac{49\sqrt{10}}{40}$ cm (2) $\dfrac{81\sqrt{2}}{16}$ cm

12

解答 $(6-2\sqrt{6})$ cm

13

解答 $AB=\sqrt{35}$ cm，$CD=\sqrt{11}$ cm

14

解答 (1) $r=13$ (2) $5<r<13$

1

解説

(1) (与式)$=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

$$=\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{6-5}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{7-6}$$

$$=(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})=\sqrt{7}-2$$

(2) (与式)$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(2+2\sqrt{6}+3)-5}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

2

解説

(1) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}=\sqrt{(7+3)+2\sqrt{7\cdot 3}}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{11-\sqrt{112}}=\sqrt{11-2\sqrt{28}}=\sqrt{(7+4)-2\sqrt{7\cdot 4}}=\sqrt{7}-\sqrt{4}=\sqrt{7}-2$

(3) $\sqrt{10+5\sqrt{3}}=\sqrt{10+\sqrt{75}}=\sqrt{\dfrac{20+2\sqrt{75}}{2}}=\dfrac{\sqrt{20+2\sqrt{75}}}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{(15+5)+2\sqrt{15\cdot 5}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{15}+\sqrt{5})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}}{2}$$

$\boxed{3}$

(解説)

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

$1<\sqrt{3}<2$ であるから　　$3<2+\sqrt{3}<4$

よって　　$a=3$，$b=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

したがって　　$a+2b+b^2=3+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2$

$$=3+2\sqrt{3}-2+(3-2\sqrt{3}+1)=5$$

別解　$a+2b+b^2=a+b(b+2)=3+(\sqrt{3}-1)\{(\sqrt{3}-1)+2\}$

$$=3+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=3+(3-1)=5$$

別解　$a+2b+b^2=a+(b+1)^2-1=3+\{(\sqrt{3}-1)+1\}^2-1$

$$=3+(\sqrt{3})^2-1=3+3-1=5$$

$\boxed{4}$

(解説)

(1) $x+y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$$=\frac{(3+2\sqrt{3}+1)+(3-2\sqrt{3}+1)}{3-1}=\frac{8}{2}=4$$

(2) $xy=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot 1=16-2=14$

(4) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\cdot 1\cdot 4=64-12=52$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}$

$$=4(14-1)=4\cdot 13=52$$

$\boxed{5}$

(解説)

(1) $|x+5|=3$ から　　$x+5=\pm 3$

したがって　　$x=-2$，-8

(2) [1] $x\geqq 1$ のとき，方程式は　　$2(x-1)=3x$

これを解いて　　$x=-2$　　　　$x=-2$ は $x\geqq 1$ を満たさない。

[2] $x<1$ のとき，方程式は　　$-2(x-1)=3x$

これを解いて　　$x=\dfrac{2}{5}$　　　　$x=\dfrac{2}{5}$ は $x<1$ を満たす。

[1]，[2] から，求める解は　　$x=\dfrac{2}{5}$

$\boxed{6}$

(解説)

(1) $|x+3|\leqq 2$ から　　$-2\leqq x+3\leqq 2$

各辺から 3 を引いて　　$-5\leqq x\leqq -1$

(2) $|x-4|>3$ から　　$x-4<-3$，$3<x-4$

したがって　　$x<1$，$7<x$

(3) [1] $x\geqq -1$ のとき，不等式は　$3(x+1)<x+5$

これを解いて　$x<1$

$x\geqq -1$ との共通範囲は　　$-1\leqq x<1$　……①

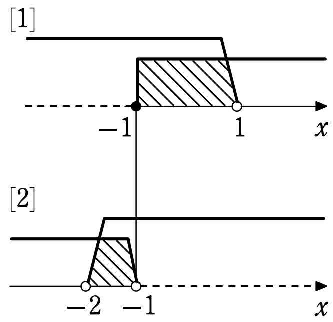
[2] $x<-1$ のとき，不等式は　$-3(x+1)<x+5$

これを解いて　$x>-2$

$x<-1$ との共通範囲は　　$-2<x<-1$　……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で

$$-2<x<1$$



$\boxed{7}$

(解説)

円 O において，方べきの定理により

$$PT^2 = PA \times PB$$

円 O′ において，方べきの定理により

$$PT^2 = PC \times PD$$

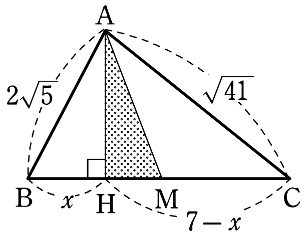
よって　$PA \times PB = PC \times PD$

したがって，方べきの定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　BH$=x$ cm とおくと，CH$=(7-x)$ cm である。



直角三角形 ABH において，三平方の定理により

$$x^2 + AH^2 = (2\sqrt{5})^2$$

よって　$AH^2 = 20 - x^2$　……①

直角三角形 ACH において，三平方の定理により

$$(7-x)^2 + AH^2 = (\sqrt{41})^2$$

よって　$AH^2 = 41 - (7-x)^2$　……②

①，② から　$20 - x^2 = 41 - (7-x)^2$

よって　$14x = 28$

したがって　$x = 2$

① に代入して　$AH^2 = 20 - 2^2 = 16$

AH>0 であるから　AH$=4$ cm

(2)　(1) より，BH$=2$ であるから　$MH = BM - BH = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$

直角三角形 AMH において，三平方の定理により　$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4^2 = AM^2$

よって　$AM^2 = \frac{73}{4}$

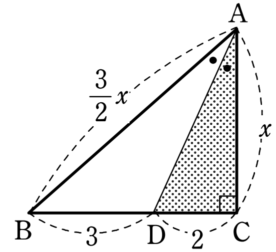
AM>0 であるから　$AM = \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$ (cm)

$\boxed{9}$

(解説)

線分 AD は，∠A の二等分線であるから

$$AB : AC = BD : DC = 3 : 2$$



よって，AC$=x$ cm とおくと，AB$=\frac{3}{2}x$ cm である。

直角三角形 ABC において，三平方の定理により

$$x^2 + (3+2)^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2$$

よって　$x^2 = 20$

$x>0$ であるから　$x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

直角三角形 ADC において，三平方の定理により

$$(2\sqrt{5})^2 + 2^2 = AD^2$$

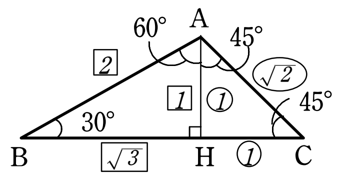
よって　$AD^2 = 24$

AD>0 であるから　$AD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (cm)

$\boxed{10}$

(解説)

(1)　$\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ$



頂点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと

$\angle BAH = 60^\circ$，　$\angle CAH = 45^\circ$

直角三角形 CHA において，

AH：CH：AC$=1:1:\sqrt{2}$ であるから

$$AH = CH = 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

直角三角形 ABH において，AH：AB：BH$=1:2:\sqrt{3}$ であるから

$$AB = 2AH = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$BH = \sqrt{3}AH = \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$

よって　$BC = BH + CH = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$ (cm)

また　$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \times 2\sqrt{2}$

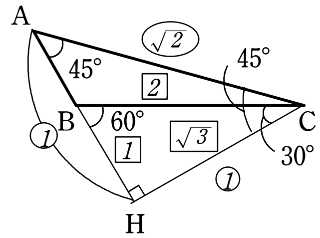
$=4\sqrt{3}+4\,(\mathrm{cm}^2)$

(2) $\angle A=180^\circ-(15^\circ+120^\circ)=45^\circ$

頂点Cから線分ABの延長に垂線CHを引くと

$\angle CBH=60^\circ$

$\angle ACH=30^\circ+15^\circ=45^\circ$



直角三角形ACHにおいて，

$AH:CH:AC=1:1:\sqrt{2}$ であるから

$AH=CH=6\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

直角三角形BCHにおいて，$BH:BC:CH=1:2:\sqrt{3}$ であるから

$BC=\dfrac{2}{\sqrt{3}}CH=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times3\sqrt{2}=2\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$

$BH=\dfrac{1}{\sqrt{3}}CH=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times3\sqrt{2}=\sqrt{6}$

よって　$AB=AH-BH=3\sqrt{2}-\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$

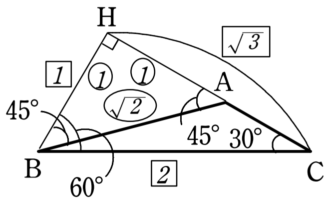
また　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times AB\times CH=\dfrac{1}{2}\times(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\times3\sqrt{2}$

$=9-3\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2)$

(3) $\angle C=180^\circ-(15^\circ+135^\circ)=30^\circ$

頂点Bから線分CAの延長に垂線BHを引くと

$\angle CBH=60^\circ$，　$\angle ABH=45^\circ$



直角三角形HBAにおいて，

$HB:HA:AB=1:1:\sqrt{2}$ であるから

$AB=\sqrt{2}HB$　……①

また，$HB=HA$ であるから，この長さを x cmとする。

直角三角形HBCにおいて，$BH:BC:CH=1:2:\sqrt{3}$ であるから

$BC=2BH$　……②

また　$BH:CH=1:\sqrt{3}$

すなわち　$x:(x+2)=1:\sqrt{3}$

よって　$\sqrt{3}x=x+2$

したがって　$(\sqrt{3}-1)x=2$

よって　$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$

②から　$BC=2(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}+2\,(\mathrm{cm})$

①から　$AB=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$

したがって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times AC\times BH=\dfrac{1}{2}\times2\times(\sqrt{3}+1)$

$=\sqrt{3}+1\,(\mathrm{cm}^2)$

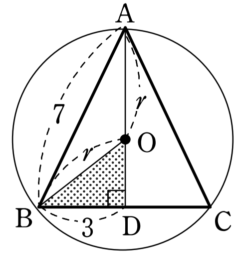
$\boxed{11}$

解説

(1) 外接円の中心をOとし，半径を r cmとする。

辺BCの垂直二等分線は，2点O，Aを通る。

辺BCの中点をDとすると，直角三角形ABDにおいて



$AD=\sqrt{7^2-3^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$OA=OB=r$ であるから，直角三角形OBDにおいて

$3^2+(2\sqrt{10}-r)^2=r^2$

よって　$4\sqrt{10}r=49$

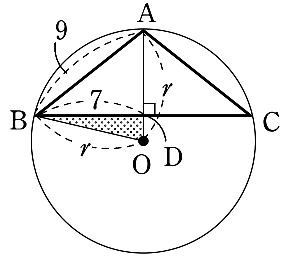
したがって　$r=\dfrac{49}{4\sqrt{10}}=\dfrac{49\sqrt{10}}{40}$

答　$\dfrac{49\sqrt{10}}{40}$ cm

(2) 外接円の中心をOとし，半径を r cmとする。

辺BCの垂直二等分線は，2点O，Aを通る。

辺BCの中点をDとすると，直角三角形ABDにおいて



$AD=\sqrt{9^2-7^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$OA=OB=r$ であるから，直角三角形OBDにおいて

$7^2+(r-4\sqrt{2})^2=r^2$

よって　$8\sqrt{2}r=81$

したがって　$r=\dfrac{81}{8\sqrt{2}}=\dfrac{81\sqrt{2}}{16}$

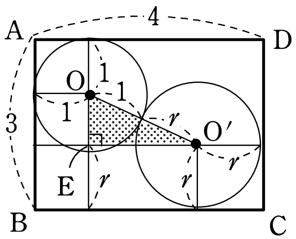
答 $\dfrac{81\sqrt{2}}{16}$ cm

$\boxed{12}$

(解説)

円 O′ の半径を r cm とする。

また，O を通り辺 AB に平行な直線と，O′ を通り辺 BC に平行な直線の交点を E とする。



2 つの円 O，O′ は外接しているから

$\mathrm{OO'}=r+1$

また，図から　$\mathrm{OE}=3-1-r=2-r$　……①

$\mathrm{O'E}=4-1-r=3-r$　……②

直角三角形 OEO′ において

$(2-r)^2+(3-r)^2=(r+1)^2$

すなわち　$r^2-12r+12=0$

これを解くと　$r=\dfrac{12\pm\sqrt{96}}{2}=6\pm2\sqrt{6}$

①，② から　$r<2$

したがって　$r=6-2\sqrt{6}$

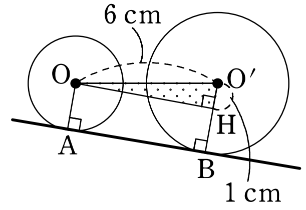
答 $(6-2\sqrt{6})$ cm

$\boxed{13}$

(解説)

O から，線分 O′B に垂線 OH を引くと

$\mathrm{O'H}=3-2=1$ (cm)



直角三角形 OO′H において

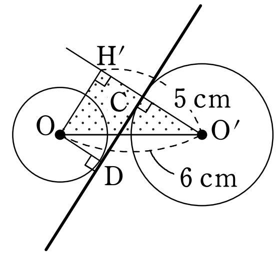
$\mathrm{OH}^2=6^2-1^2=35$

$\mathrm{OH}>0$ であるから　$\mathrm{OH}=\sqrt{35}$ cm

よって　$\mathrm{AB}=\sqrt{35}$ cm

O から，直線 O′C に垂線 OH′ を引くと

$\mathrm{O'H'}=3+2=5$ (cm)



直角三角形 OO′H′ において

$\mathrm{OH'}^2=6^2-5^2=11$

$\mathrm{OH'}>0$ であるから　$\mathrm{OH'}=\sqrt{11}$ cm

よって　$\mathrm{CD}=\sqrt{11}$ cm

$\boxed{14}$

(解説)

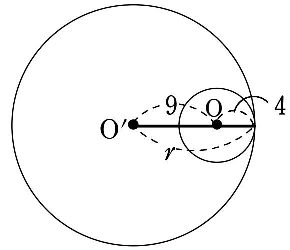
(1)　円 O が円 O′ に内接するとき　$r-4=9$

よって　$r=13$

(2)　2 つの円が異なる 2 点で交わるのは

$r-4<9<r+4$

のときである。



$r-4<9$ を解くと　$r<13$

$9<r+4$ を解くと　$r>5$

よって　$5<r<13$