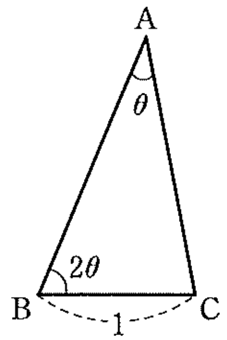
1

(解説)

$\angle A=\theta$ とおくと　$\angle B=2\theta$，$\angle C=\pi-(\angle A+\angle B)=\pi-3\theta$

また，$0<\angle A<\pi$ かつ $0<\angle B<\pi$ かつ $0<\angle C<\pi$ であるから

$$0<\theta<\frac{\pi}{3}\quad\cdots\cdots①$$



$\triangle ABC$ において，正弦定理により　$\dfrac{CA}{\sin\angle B}=\dfrac{CB}{\sin\angle A}$

よって　$CA=\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle A}CB=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\cdot 1=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$

ゆえに，$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}CA\cdot CB\sin\angle C=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 1\cdot\sin(\pi-3\theta)$$

$$=\sin 3\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(2\sin 2\theta\cos 2\theta+\sin 2\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta(2\cos 2\theta+1)$$

$\cos 2\theta=x$ とおくと，① より，$0<2\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ であるから　$-\dfrac{1}{2}<x<1\quad\cdots\cdots②$

$\sin 2\theta>0$ から　$\sin 2\theta=\sqrt{1-\cos^2 2\theta}=\sqrt{1-x^2}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}(2x+1)=\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-x^2)(2x+1)^2}$

ここで，$f(x)=(1-x^2)(2x+1)^2$ とおくと

$$f(x)=(1-x^2)(4x^2+4x+1)=-4x^4-4x^3+3x^2+4x+1$$

ゆえに　$f'(x)=-16x^3-12x^2+6x+4=-2(2x+1)(4x^2+x-2)$

$f'(x)=0$ とすると，② から　$x=\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}$

$-\dfrac{1}{2}<x<1$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{33}-1}{8}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

$f\left(\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}\right)>0$ から，$f(x)$ が最大であるとき，S も最大である。

求める $\cos\angle B$ は，S を最大にする x の値であるから　$\cos\angle B=\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}$

別解　$S=\dfrac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)$ を導くまでは同様。

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}(4\cos 4\theta+2\cos 2\theta)=2(2\cos^2 2\theta-1)+\cos 2\theta$$

$$=4\cos^2 2\theta+\cos 2\theta-2$$

① より，$0<2\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ であるから　$-\dfrac{1}{2}<\cos 2\theta<1$

$\dfrac{dS}{d\theta}=0$ とすると，$-\dfrac{1}{2}<\cos 2\theta<1$ から　$\cos 2\theta=\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}$

$0<2\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\cos 2\theta$ は単調減少であるから，この範囲で，

$\cos 2\theta=\dfrac{\sqrt{33}-1}{8}$ となる θ はただ1つ存在する。

これを満たす θ の値を α とすると，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ における S の増減表は右のようになる。

よって，S は $\theta=\alpha$ で最大値をとる。

このとき，求める $\cos\angle B$ は

$$\cos\angle B=\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$$

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S	0	↗	極大	↘	0

注意　別解は，数学Ⅲで学習する「微分法」の内容を利用している。

2

解説

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ ……①

条件より，a^3+b^3 は 3 で割り切れるから，① より $(a+b)^3$ も 3 で割り切れる。

したがって，$a+b$ も 3 で割り切れる。

ここで，$a+b=3k$ (k は自然数) とおいて，① に代入すると

$27k^3=a^3+b^3+9abk$ すなわち $a^3+b^3=9k(3k^2-ab)$

a，b はどちらも 3 で割り切れないから，$3k^2-ab$ は 3 で割り切れない。

したがって，a^3+b^3 が 81 で割り切れることから，k は 9 で割り切れる。

ゆえに，$a+b$ は 27 で割り切れる。

よって，$a+b=27n$ (n は自然数) とおける。

このとき，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$ より

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(27n)^2+(a-b)^2\} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，$a+b$ が 3 で割り切れ，a，b がどちらも 3 で割り切れないことから，a，b を 3 で割った余りは一致しない。

したがって $a \neq b$ よって $(a-b)^2>0$

ゆえに，② において，a^2+b^2 が最小となるのは $n=1$，$(a-b)^2=1$ すなわち

$a+b=27$，$(a-b)^2=1$ のときで，これを満たす自然数 a，b は

$(a,\ b)=(13,\ 14)$，$(14,\ 13)$

このとき，a^2+b^2 の値は $a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(27^2+1^2)=365$

したがって，a^2+b^2 は，$(a,\ b)=(13,\ 14)$，$(14,\ 13)$ のとき，最小値 365 をとる。

3

解説

(1) A(α)，B(β)，P(γ) とする。

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\frac{7+7i-\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}}{6-\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}}=\frac{(7+7i)\{(1-i)t-7\}-14(t-3)}{6\{(1-i)t-7\}-14(t-3)}$$

$$=\frac{-7-49i}{-8t-6ti}=\frac{7(1+7i)}{2t(4+3i)}=\frac{7}{2t}\cdot\frac{(1+7i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$

$$=\frac{7}{2t}(1+i)=\frac{7}{\sqrt{2}\,t}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

t は正の実数であるから $\angle\alpha\gamma\beta=\dfrac{\pi}{4}$

したがって $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\dfrac{\beta-0}{\alpha-0}=\dfrac{7+7i-0}{6-0}=\dfrac{7}{6}(1+i)=\dfrac{7\sqrt{2}}{6}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって，$\angle\alpha 0\beta=\dfrac{\pi}{4}$ であるから $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに，点 P，O は直線 AB に関して同じ側にあり

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{APB}$

であるから，円周角の定理の逆により，4 点 O，A，B，P は同一円周上にある。

この円の中心を Q(z) とすると $\angle\mathrm{AQB}=2\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

よって $(7+7i)-z=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)(6-z)$

したがって $z=\dfrac{7+i}{1-i}=\dfrac{(7+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=3+4i$

P(w) とすると，線分 OP の長さが最大となるのは，OP が円の直径となるときで

$w=2z=6+8i$

よって，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=6+8i$ から $7(t-3)=\{(t-7)-ti\}(3+4i)$

ゆえに $(t-28)i=0$

t は正の実数であるから $t=28$

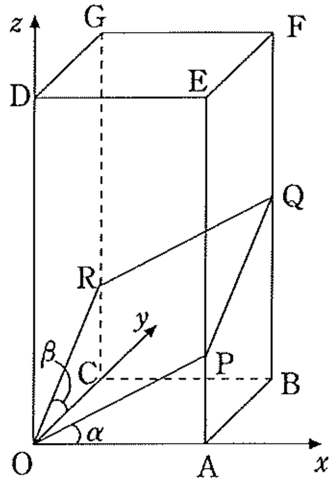
$\boxed{4}$

(解説)

(1) (平面 OPED)∥(平面 RQFG) から　　OP∥RQ

(平面 ORGD)∥(平面 PQFE) から　　OR∥PQ

よって，四角形 OPQR は平行四辺形である。



座標空間に四角柱 OABC−DEFG をとり，O を原点，直線 OA，OC，OD を右の図のようにそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸とすると

A$(1,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ 0)$，

P$(1,\ 0,\ \tan\alpha)$，

R$(0,\ 1,\ \tan\beta)$

ゆえに　$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}$

$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$

$=\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta+1}$　……①

(2) $\tan\alpha=a$，$\tan\beta=b$ とおくと，$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}$ から

$a\geqq0$，$b\geqq0$　……②

ここで　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{a+b}{1-ab}$

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\tan(\alpha+\beta)=1$ であるから　　$a+b=1-ab$

$a+b=c$ とおくと　　$ab=1-c$　……③

①から　　$S^2=a^2+b^2+1=(a+b)^2-2ab+1$

③を代入すると　　$S^2=c^2-2(1-c)+1=c^2+2c-1$

$S=\dfrac{7}{6}$ のとき　　$c^2+2c-1=\dfrac{49}{36}$

整理すると　　$36c^2+72c-85=0$

$(6c-5)(6c+17)=0$ から　　$c=\dfrac{5}{6},\ -\dfrac{17}{6}$

②より，$c=a+b\geqq0$ であるから　　$c=\dfrac{5}{6}$

すなわち　　$a+b=\dfrac{5}{6}$

$c=\dfrac{5}{6}$ を③に代入すると　　$ab=\dfrac{1}{6}$

したがって，a，b は $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$ すなわち $6x^2-5x+1=0$ の解である。

これを解いて　　$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}$

$\alpha\leqq\beta$ のとき $a\leqq b$ であるから　　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{1}{2}$

以上から　　$\tan\alpha+\tan\beta=a+b=\dfrac{5}{6}$

$\tan\alpha=a=\dfrac{1}{3}$