【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材①

中３甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｒ「数列」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

等差数列 $\{a_n\}$ の第 5 項が 34，第 10 項が 14 であるとする。

(1)　一般項 a_n を求めよ。

(2)　初めて負の値となるのは第何項か。

(3)　初項から第 n 項までの和 S_n の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$

等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ は，ともに初項が 1 であり，$a_2=b_2$，$a_3 \fallingdotseq b_3$，$a_4=b_4$ を満たしている。このとき，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$

次の等比数列で，指定されたものを求めよ。各項は実数とする。

(1)　第 2 項が 6，第 2 項から第 4 項までの和が 42 のとき，初項と公比

(2)　初項から第 10 項までの和が 2，第 20 項までの和が 8 のとき，第 30 項までの和

$\boxed{4}$

次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(9k^2-4k+1)$　　(2)　$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}(2l-3)(l^2+5)$　　(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot 3^{k-1}$

$\boxed{5}$

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$1\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ 5\cdot 5,\ 7\cdot 6,\ \cdots\cdots$$

$\boxed{6}$

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$1,\ 1+2,\ 1+2+4,\ 1+2+4+8,\ \cdots\cdots$$

$\boxed{7}$

次の数列の第 k 項 a_k $(k \leqq n)$ と和 S を求めよ。

$$1\cdot(2n-1),\ 3(2n-3),\ 5(2n-5),\ \cdots\cdots,\ (2n-3)\cdot 3,\ (2n-1)\cdot 1$$

$\boxed{8}$

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　4，5，8，13，20，29，……

(2)　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n^2+1$ である数列

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a_n=-4n+54$　(2)　第 14 項　(3)　338

$\boxed{2}$

解答　$a_n=-3n+4$，$b_n=(-2)^{n-1}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　初項 -2，公比 -3 または 初項 3，公比 2　(2)　26

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}n(2n+1)(3n+1)$　(2)　$\dfrac{1}{2}n(n^3+8n-21)$　(3)　3^n-1

$\boxed{5}$

解答　$\dfrac{1}{6}n(4n^2+15n-1)$

$\boxed{6}$

解答　$2^{n+1}-n-2$

$\boxed{7}$

解答　第 k 項 $-4k^2+4(n+1)k-(2n+1)$，$S=\dfrac{1}{3}n(2n^2+1)$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$a_n=n^2-2n+5$　(2)　$a_1=2$，　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2n-1$

$\boxed{1}$

解説

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とする。

$a_5=34$ から　$a+4d=34$　…… ①

$a_{10}=14$ から　$a+9d=14$　…… ②

①，② を解くと　$a=50$，$d=-4$

よって，一般項は　$a_n=50+(n-1)\cdot(-4)$

すなわち　$a_n=-4n+54$

(2)　$a_n<0$ とすると　$-4n+54<0$

$$n>\frac{27}{2}=13.5$$

よって，初めて負の値となるのは　第 14 項

(3)　$1\leqq n\leqq 13$ のとき $a_n>0$，$n\geqq 14$ のとき $a_n<0$ であるから，S_n が最大となるのは $n=13$ のときで，最大値は

$$S_{13}=\frac{1}{2}\cdot 13\{2\cdot 50+(13-1)(-4)\}=338$$

別解　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot 50+(n-1)(-4)\}=-2n^2+52n$

$=-2(n-13)^2+338$

よって，$n=13$ のとき S_n は最大値 338 をとる。

$\boxed{2}$

解説

数列 $\{a_n\}$ の公差を d，数列 $\{b_n\}$ の公比を r とすると

$$a_n=1+(n-1)d,\quad b_n=1\cdot r^{n-1}=r^{n-1}$$

$a_2=b_2$ から　$1+d=r$　…… ①

$a_4=b_4$ から　$1+3d=r^3$　…… ②

① から　$d=r-1$　…… ③

③ を ② に代入して　$1+3(r-1)=r^3$

これを変形して　$r^3-1-3(r-1)=0$

$(r-1)(r^2+r+1)-3(r-1)=0$

$(r-1)(r^2+r-2)=0$

$(r-1)^2(r+2)=0$

よって　$r=1,\ -2$

[1]　$r=1$ のとき，③ から　$d=0$

このとき　$a_3=1+2d=1$，　$b_3=r^2=1$

よって，$a_3=b_3$ となり，条件 $a_3\fallingdotseq b_3$ に適さない。

[2]　$r=-2$ のとき，③ から　$d=-3$

このとき　$a_3=1+2d=-5$，　$b_3=r^2=4$

よって，条件 $a_3 \fallingdotseq b_3$ に適する。

したがって，$d=-3$，$r=-2$ であり

$$a_n=1+(n-1)\cdot(-3)=-3n+4,\quad b_n=(-2)^{n-1}$$

3

(解説)

(1)　初項を a，公比を r とする。

第 2 項が 6 であるから　　$ar=6$　……①

第 2 項から第 4 項までの和が 42 であるから　　$ar+ar^2+ar^3=42$

よって　　$ar(1+r+r^2)=42$　　　これに ① を代入して　　$6(1+r+r^2)=42$

整理すると　　$r^2+r-6=0$　　　すなわち　　$(r+3)(r-2)=0$

ゆえに　　$r=-3,\ 2$

① から　　$r=-3$ のとき　$a=-2$，　$r=2$ のとき　$a=3$

したがって，初項 -2，公比 -3 または初項 3，公比 2

(3)　初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ とすると，$S_{10}=10a$，$S_{20}=20a$ となり，$S_{10}=2$，$S_{20}=8$ であるから

$$10a=2,\quad 20a=8$$

これらをともに満たす a は存在しないから　$r \fallingdotseq 1$

したがって，$S_{10}=\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}$，$S_{20}=\dfrac{a(1-r^{20})}{1-r}$ であり

$$\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=2 \quad \cdots\cdots ①,\qquad \frac{a(1-r^{20})}{1-r}=8 \quad \cdots\cdots ②$$

$1-r^{20}=(1-r^{10})(1+r^{10})$ であるから，② より　　$\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}\cdot(1+r^{10})=8$

① を代入して　　$2(1+r^{10})=8$　　　よって　　$r^{10}=3$　……③

③ を ① に代入すると　　$\dfrac{a(1-3)}{1-r}=2$　　　ゆえに　　$\dfrac{a}{1-r}=-1$

したがって　　$S_{30}=\dfrac{a(1-r^{30})}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}\{1-(r^{10})^3\}=(-1)\cdot(1-3^3)=26$

別解　$1-r^{30}=1-(r^{10})^3=(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})$ であるから

$$S_{30}=\frac{a(1-r^{30})}{1-r}=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}\{1+r^{10}+(r^{10})^2\}$$

①，③ を代入して　　$S_{30}=2(1+3+3^2)=26$

4

(解説)

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(9k^2-4k+1)=9\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$$=9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1)-4(n+1)+2\}$$

$$=\frac{1}{2}n(6n^2+5n+1)=\frac{1}{2}n(2n+1)(3n+1)$$

(2)　$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}(2l-3)(l^2+5)=\sum_{l=1}^{n}(2l^3-3l^2+10l-15)$

$$=2\sum_{l=1}^{n}l^3-3\sum_{l=1}^{n}l^2+10\sum_{l=1}^{n}l-\sum_{l=1}^{n}15$$

$$=2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+10\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-15n$$

$$=\frac{1}{2}n\{n(n+1)^2-(n+1)(2n+1)+10(n+1)-30\}$$

$$=\frac{1}{2}n\{n^3+2n^2+n-(2n^2+3n+1)+10n+10-30\}$$

$$=\frac{1}{2}n(n^3+8n-21)$$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^{k-1}=2\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}=2\cdot\frac{3^n-1}{3-1}=3^n-1$

5

(解説)

この数列の第 k 項 a_k は　　$a_k=(2k-1)(k+2)=2k^2+3k-2$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k-2)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n$$
$$=\frac{1}{6}n\{2(n+1)(2n+1)+9(n+1)-12\}$$
$$=\frac{1}{6}n(4n^2+15n-1)$$

$\boxed{6}$

(解説)

この数列の第 k 項 a_k は　　$a_k=1+2+4+\cdots\cdots+2^{k-1}=\dfrac{1(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$

$\boxed{7}$

(解説)

この数列の第 k 項 a_k は

$$a_k=(2k-1)\{2n-(2k-1)\}=-(2k-1)\{2k-(2n+1)\}$$
$$=-4k^2+4(n+1)k-(2n+1)$$

よって　　$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-4k^2+4(n+1)k-(2n+1)\}$

$$=-4\sum_{k=1}^{n}k^2+4(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-(2n+1)\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(2n+1)n$$
$$=\frac{1}{3}n\{-2(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2-3(2n+1)\}$$
$$=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，3，5，7，9，……

となり，これは正の奇数の列である。

よって　　$b_n=2n-1$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=4+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$
$$=4+2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1=4+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$
$$=n^2-2n+5\quad\cdots\cdots ①$$

初項は $a_1=4$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　　$a_n=n^2-2n+5$

(2)　$n=1$ のとき　　$a_1=S_1=1^2+1=2$

$n\geqq 2$ のとき　　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+1)-\{(n-1)^2+1\}$

$$=(n^2+1)-(n^2-2n+2)$$
$$=2n-1\quad\cdots\cdots ①$$

① で $n=1$ とすると $a_1=1$ となり，① は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　　$a_1=2$，　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2n-1$

注意　① は $n=1$ のとき成り立たない。このような場合，上の解答のように，a_1 と $n\geqq 2$ のときの a_n を別々に表す。

なお，$a_n=S_n-S_{n-1}$ で $n=1$ とした値と a_1 が一致するのは，S_n の式で $n=0$ としたとき $S_0=0$ となる場合である。