1

解答　(ア)　②　$\dfrac{(イ)}{(ウ)}$　$\dfrac{4}{5}$　(エオカ)　345　(キ)　6　$\sqrt{(ク)}$　$\sqrt{3}$

(ケ)　3　(コ)　2　$\dfrac{(サシ)}{(スセ)}$　$\dfrac{29}{30}$

解説

(1)　1 ラジアンとは，

半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ（^{ア}②）

である。

(2)　144° を弧度法で表すと　$\dfrac{144}{180}\pi=\dfrac{^{イ}4}{^{ウ}5}\pi$

$\dfrac{23}{12}\pi$ ラジアン を度数法で表すと　$\dfrac{23}{12}\times180°={}^{エオカ}345°$

(3)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{30}\right)=1$ ……① について，$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ とおくと

$2\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{30}\right)=1$　すなわち　$2\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{^{キ}6}\right)=1$

加法定理により　$(左辺)=2\sin x-2\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

よって，① は　$\sin x-\sqrt{^{ク}3}\cos x=1$

さらに，左辺について，三角関数の合成を用いると　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

すなわち　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{^{ケ}3}\right)=\dfrac{1}{^{コ}2}$

$x-\dfrac{\pi}{3}=\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-\dfrac{\pi}{3}=\theta-\dfrac{2}{15}\pi$ であるから　$\sin\left(\theta-\dfrac{2}{15}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ より　$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{15}\pi\leqq\theta-\dfrac{2}{15}\pi\leqq\pi-\dfrac{2}{15}\pi$

この範囲において，$\sin\left(\theta-\dfrac{2}{15}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$ を満たすのは　$\theta-\dfrac{2}{15}\pi=\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{^{サシ}29}{^{スセ}30}\pi$

2

解答　(ア)　2　(イ)　3　(ウ)　1　(エ)　2　(オ)　0　(カ)　3　(キ)　9

(ク)　②　$\dfrac{(ケ)}{(コ)}$　$\dfrac{3}{4}$　$\sqrt[(サ)]{(シス)}$　$\sqrt[4]{27}$

解説

$x^{\log_3 x}\geqq\left(\dfrac{x}{c}\right)^3$ ……① について，$\log_3 x$ の真数 x は正である。

これと $c>0$ より，① の両辺は正である。

$3\,(>1)$ を底とする ① の両辺の対数をとると　$\log_3 x^{\log_3 x}\geqq\log_3\left(\dfrac{x}{c}\right)^3$

すなわち　$(\log_3 x)^2\geqq3(\log_3 x-\log_3 c)$

$t=\log_3 x$ とおき，変形すると　$t^{^{ア}2}-{}^{イ}3t+3\log_3 c\geqq0$ ……②

(前半)　$c=\sqrt[3]{9}$ のとき　$3\log_3 c=3\log_3\sqrt[3]{9}=3\log_3 3^{\frac{2}{3}}=3\cdot\dfrac{2}{3}=2$

よって，② は　$t^2-3t+2\geqq0$

$(t-1)(t-2)\geqq0$

ゆえに　$t\leqq{}^{ウ}1$，$t\geqq{}^{エ}2$

すなわち　$\log_3 x\leqq1$，$\log_3 x\geqq2$

これと $x>0$ から　${}^{オ}0<x\leqq{}^{カ}3$，$x\geqq{}^{キ}9$

(後半)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$t=\log_3 x$ のとり得る値の範囲は

実数全体（^{ク}②）である。

よって，① が $x>0$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲は，

② がすべての実数 t でつねに成り立つ c の値の範囲

と一致する。

2 次方程式 $t^2-3t+3\log_3 c=0$ の判別式を D とすると，求める条件は

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot3\log_3 c\leqq0$

よって　$\log_3 c \geqq \dfrac{{}^{ケ}3}{{}^{コ}4}$　　ゆえに　$c \geqq 3^{\frac{3}{4}}$　すなわち　$c \geqq \sqrt[{}^{サ}4]{{}^{シス}27}$

3

解答　（ア）2　（イウ）-2　（エ）2　（オ）1　（カ）3　（キ）3　（ク）3

（ケ）1　（コ）2　（サ）3　$\dfrac{(シ)+\sqrt{(ス)}}{(セ)}$　$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　（ソ）③

（タチ）-1

解説

(1)　$y=px^2+qx+r$ から　$y'=2px+q$

接線 ℓ の傾きは ${}^{ア}2$ であるから　$2p\cdot 1+q=2$　　よって　$q={}^{イウ}-2p+{}^{エ}2$

また，C が点 A(1, 1) を通ることから　$1=p\cdot 1^2+q\cdot 1+r$

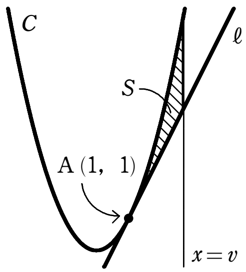
よって　$r=-p-q+1=-p-(-2p+2)+1=p-{}^{オ}1$

(2)　$S=\displaystyle\int_1^v\{(px^2+qx+r)-(2x-1)\}dx$

$=\displaystyle\int_1^v[\{px^2+(-2p+2)x+(p-1)\}-2x+1]dx$

$=\displaystyle\int_1^v p(x^2-2x+1)dx=p\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^v$

$=\dfrac{p}{{}^{カ}3}(v^3-{}^{キ}3v^2+{}^{ク}3v-{}^{ケ}1)$



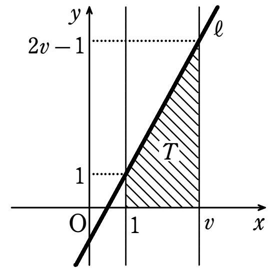
別解　（S の計算）

$$S=\int_1^v p(x^2-2x+1)dx=\int_1^v p(x-1)^2dx=p\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^v=\frac{p}{3}(v-1)^3$$

$=\dfrac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)$

また　$T=\dfrac{1}{2}(v-1)\{1+(2v-1)\}$

$=v^{{}^{コ}2}-v$



よって　$U=S-T=\dfrac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)-(v^2-v)$

$=\dfrac{p}{3}v^3-(p+1)v^2+(p+1)v-\dfrac{p}{3}$

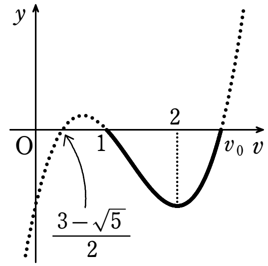
$U=g(v)$ とおくと　$g'(v)=pv^2-2(p+1)v+p+1$

$g(v)$ は $v=2$ で極値をとるから　$g'(2)=0$

よって　$p\cdot 2^2-2(p+1)\cdot 2+p+1=0$　　ゆえに　$p={}^{サ}3$

よって　$g(v)=v^3-4v^2+4v-1$

$=(v-1)(v^2-3v+1)$



$g(v)=0$ とすると　$v=1,\ \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$v_0>1$ より　$v_0=\dfrac{{}^{シ}3+\sqrt{{}^{ス}5}}{{}^{セ}2}$

$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}(=v_0)$ であるから，$1<v<v_0$ における $y=g(v)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。

ゆえに，$1<v<v_0$ の範囲で U は，負の値のみをとる（^{ソ}③）。

また，$v>1$ における U の最小値は　$g(2)=(2-1)(2^2-3\cdot 2+1)={}^{タチ}-1$

参考　$p=3$ のとき，$g(v)$ の増減表をかくと，確かに $v=2$ で極値をとることがわかる。

4

解答　（ア）⑦　（イ）④　（ウエ）-6　（オ）2　（カ）2

解説

$f(x)$ とその不定積分 $F(x)$ について　$F'(x)=f(x)$（^{ア}⑦）

$f(x)$ について，$x\geqq 1$ の範囲でつねに $f(x)\leqq 0$ であるから，$t>1$ のとき

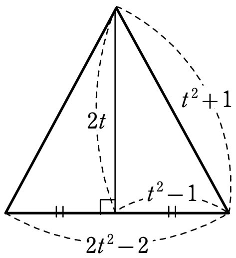
$$W=\int_1^t\{-f(x)\}dx$$

$$=-\int_1^t f(x)\,dx=-\int_1^t F'(x)\,dx$$

$$=-\Big[F(x)\Big]_1^t=-F(t)+F(1) \qquad (^{イ}④)$$

一方，底辺の長さが $2t^2-2$，他の 2 辺の長さがそれぞれ t^2+1 の二等辺三角形について，高さは

$$\sqrt{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}=\sqrt{4t^2}=2t$$



よって，その面積は　$\frac{1}{2}(2t^2-2)\cdot 2t=2t^3-2t$

ゆえに　$W=2t^3-2t$

よって　$-F(t)+F(1)=2t^3-2t$

すなわち　$F(t)=-2t^3+2t+F(1)$

両辺を t で微分すると　$F'(t)=-6t^2+2$

したがって　$f(t)=^{ウエ}-6t^{^{オ}2}+^{カ}2$

よって，$x>1$ において　$f(x)=-6x^2+2$

$\boxed{5}$

解答　（アイ）-6　（ウエ）12　（オ）6　（カキ）12　（クケ）12　（コ）3
（サ）6　（シ）3　（ス）1　（セ）⑤　（ソ）6　（タ）3　（チ）2
（ツテト）-18　（ナ）2　（ニ）3　（ヌ）9　（ネ）2

解説

(1)　$\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると　$a_n=a+(n-1)d$

$a_4=30$ より　$a+3d=30$　……①

また，初項から第 8 項までの和が 288 であるから

$\frac{1}{2}\cdot 8(2a+7d)=288$　　よって　$2a+7d=72$　……②

①，② を解くと　$a=-6$，$d=12$

したがって，$\{a_n\}$ の初項は $^{アイ}-6$，公差は $^{ウエ}12$

初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot(-6)+(n-1)\cdot 12\}=^{オ}6n^2-^{カキ}12n$$

(2)　$\{b_n\}$ の初項を b，公比を r とすると　$b_n=b\cdot r^{n-1}$

$b_2=36$ より　$br=36$　……③

また，初項から第 3 項までの和が 156 であるから　$b(1+r+r^2)=156$

この式の両辺に r を掛けると　$br(1+r+r^2)=156r$

③ を代入すると　$36(1+r+r^2)=156r$

整理すると　$3r^2-10r+3=0$

すなわち　$(3r-1)(r-3)=0$　　したがって　$r=\frac{1}{3}$，3

$r>1$ であるから　$r=3$　　③ より　$b=\frac{36}{3}=12$

したがって，$\{b_n\}$ の初項は $^{クケ}12$，公比は $^{コ}3$

初項から第 n 項までの和 T_n は　$T_n=\frac{12(3^n-1)}{3-1}=^{サ}6(^{シ}3^n-^{ス}1)$

(3)　$d_n=c_{n+1}-c_n$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\{(n+1)-k+1\}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$$

$$=(a_{n+1}-b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)-k+1\}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$$

$$=(a_{n+1}-b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}[\{(n+1)-k+1\}-(n-k+1)](a_k-b_k)$$

$$=(a_{n+1}-b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n+1}b_k=S_{n+1}-T_{n+1}$$

よって　$d_n=S_{n+1}-T_{n+1}$　$(^{セ}⑤)$

ゆえに，(1)，(2) により

$$d_n=6(n+1)^2-12(n+1)-6(3^{n+1}-1)$$

$$=^{ソ}6n^2-2\cdot{}^{タ}3^{n+^{チ}2}$$

また　$c_1=a_1-b_1=-6-12=^{ツテト}-18$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k$$

$$= -18 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k^2 - 2\cdot 3^{k+2})$$

$$= -18 + 6\cdot\frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\} - 18\cdot\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$= -18 + n(n-1)(2n-1) - 27(3^{n-1}-1)$$

$$= 2n^3 - 3n^2 + n + 9 - 3^{n+2}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，$\{c_n\}$ の一般項は　$c_n = {}^{\text{ナ}}2n^3 - {}^{\text{ニ}}3n^2 + n + {}^{\text{ヌ}}9 - 3^{n+{}^{\text{ネ}}2}$

$\boxed{6}$

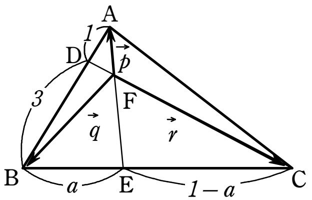
解答　（ア）②　（イ）2　$\dfrac{（ウ）}{（エ）}$ $\dfrac{3}{4}$　$\dfrac{（オ）}{（カ）}$ $\dfrac{1}{4}$　（キク）-3　（ケ）4

（コ）1　（サ）a　（シ）a　（スセ）$-a$　（ソ）4　（タチ）-3

（ツ）9　（テ）6　$\dfrac{（トナ）-（ニ）}{（ヌ）}$ $\dfrac{3a-2}{2}$

解説

(1)　$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FA} = \vec{q} - \vec{p}$　（${}^{\text{ア}}$②）



よって　$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{q}-\vec{p}|^2$

$$= |\vec{p}|^2 - {}^{\text{イ}}2\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2 \quad \cdots\cdots ①$$

(2)　点 D は辺 AB を $1:3$ に内分するから

$$\overrightarrow{FD} = \frac{3\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}}{1+3} = \frac{{}^{\text{ウ}}3}{{}^{\text{エ}}4}\vec{p} + \frac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}4}\vec{q} \quad \cdots\cdots ②$$

(3)　s，t をそれぞれ $\overrightarrow{FD} = s\vec{r}$，$\overrightarrow{FE} = t\vec{p}$ を満たす実数とする。

②により　$\dfrac{3}{4}\vec{p} + \dfrac{1}{4}\vec{q} = s\vec{r}$

よって　$\vec{q} = {}^{\text{キク}}-3\vec{p} + {}^{\text{ケ}}4s\vec{r}$　$\cdots\cdots$ ③

点 E は辺 BC を $a:(1-a)$ に内分するから　$\overrightarrow{FE} = (1-a)\vec{q} + a\vec{r}$

また，$\overrightarrow{FE} = t\vec{p}$ であるから　$(1-a)\vec{q} + a\vec{r} = t\vec{p}$

よって　$\vec{q} = \dfrac{t}{{}^{\text{コ}}1 - {}^{\text{サ}}a}\vec{p} - \dfrac{{}^{\text{シ}}a}{1-a}\vec{r}$　$\cdots\cdots$ ④

$\vec{p} \neq \vec{0}$，$\vec{r} \neq \vec{0}$，$\vec{p} \nparallel \vec{r}$ であるから，③，④ より

$$-3 = \frac{t}{1-a},\quad 4s = -\frac{a}{1-a}$$

したがって　$s = \dfrac{{}^{\text{スセ}}-a}{{}^{\text{ソ}}4(1-a)}$，$t = {}^{\text{タチ}}-3(1-a)$

(4)　$|\vec{p}| = 1$ のとき，① により　$|\overrightarrow{AB}|^2 = 1 - 2\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2$

また　$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FB} = t\vec{p} - \vec{q}$

よって　$|\overrightarrow{BE}|^2 = |t\vec{p} - \vec{q}|^2$

$$= t^2|\vec{p}|^2 - 2t\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2$$

$$= t^2 - 2t\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2$$

$t = -3(1-a)$ であるから

$$|\overrightarrow{BE}|^2 = {}^{\text{ツ}}9(1-a)^2 + {}^{\text{テ}}6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2$$

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BE}|^2$ より

$$1 - 2\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2 = 9(1-a)^2 + 6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q} + |\vec{q}|^2$$

整理すると　$2(3a-4)\vec{p}\cdot\vec{q} = (3a-2)(3a-4)$

$0 < a < 1$ より，$3a - 4 \neq 0$ であるから　$\vec{p}\cdot\vec{q} = \dfrac{{}^{\text{トナ}}3a - {}^{\text{ニ}}2}{{}^{\text{ヌ}}2}$

$\boxed{7}$

解答　$\dfrac{（ア）}{（イ）}$ $\dfrac{1}{a}$　（ウ）6　（エ）8　（オ）2　（カ）8　0.（キ）0.6

$\dfrac{（ク）}{（ケ）}$ $\dfrac{1}{6}$　（コサ）30　（シス）25　（セ）.（ソタ）2.40　（チ）.（ツテ）1.20

0.（トナ）0.88　0.（ニ）0.8　0.（ヌネ）0.76　0.（ノハ）0.84　（ヒ）④

解説

(1)　箱から 1 枚のカードを無作為に取り出すとき，$X = 2a$ となる確率は　$\dfrac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}a}$

$a = 5$ のとき，確率変数 X の確率分布は次の表のようになる。

X	2	4	6	8	10	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

よって，X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{5}+10\cdot\frac{1}{5}$$

$$=(2+4+6+8+10)\cdot\frac{1}{5}={}^{ウ}6$$

分散 $V(X)$ は　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=2^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{5}+6^2\cdot\frac{1}{5}+8^2\cdot\frac{1}{5}+10^2\cdot\frac{1}{5}-6^2$$

$$=(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)\cdot\frac{1}{5}-36$$

$$=44-36={}^{エ}8$$

したがって　$E(sX+t)=sE(X)+t=6s+t$

$V(sX+t)=s^2V(X)=8s^2$

$E(sX+t)=20$，$V(sX+t)=32$ より　$6s+t=20$，$8s^2=32$

$s>0$ であるから　$s={}^{オ}2$，$t={}^{カ}8$

このとき，$2X+8\geqq20$ を解くと　$X\geqq6$

よって，$2X+8$ が 20 以上である確率は

$$P(6\leqq X\leqq10)=P(X=6)+P(X=8)+P(X=10)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=0.{}^{キ}6$$

(2)　取り出す 3 枚のカードをどのように選んでも，それらを横 1 列に並べる $3!=6$ 通りの並べ方のうち，数字が左から小さい順に並んでいる並べ方は 1 通りしかない。

よって，事象 A の起こる確率は　$\frac{{}^{ク}1}{{}^{ケ}6}$

事象 A が，ちょうど n 回起こる確率は，${}_{180}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{180-n}$ であるから，確率変数 Y は，二項分布 $B\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。

したがって，Y の平均 m は　$m=180\cdot\frac{1}{6}={}^{コサ}30$

分散 σ^2 は　$\sigma^2=180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}={}^{シス}25$

試行回数 180 は大きいことから，Y は近似的に正規分布 $N(30,\ 5^2)$ に従う。

ここで，$Z=\frac{Y-30}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって　$P(18\leqq Y\leqq36)=P(-{}^{セ}2.{}^{ソタ}40\leqq Z\leqq{}^{チ}1.{}^{ツテ}20)$

$=p(2.40)+p(1.20)$

$=0.4918+0.3849$

$=0.8767$

したがって　$P(18\leqq Y\leqq36)=0.{}^{トナ}88$

(3)　400 人の有権者のうち，320 人が賛成であったから，標本比率 R は

$$R=\frac{320}{400}=\frac{4}{5}=0.{}^{ニ}8$$

また，標本の大きさは，$n=400$ であるから

$$\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{400}}=0.02$$

したがって，p に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$[0.8-1.96\cdot0.02,\ 0.8+1.96\cdot0.02]$

すなわち　$[0.7608,\ 0.8392]$

よって　$0.{}^{ヌネ}76\leqq p\leqq0.{}^{ノハ}84$

標本の大きさ n，標本比率 R の p に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅は，n が大きいとき　$2\times1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=3.92\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$

よって　$L_1=3.92\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{400}}=3.92\sqrt{\frac{0.16}{400}}$

$L_2=3.92\sqrt{\frac{0.6\times(1-0.6)}{400}}=3.92\sqrt{\frac{0.24}{400}}$

$L_3=3.92\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{500}}=3.92\sqrt{\frac{0.16}{500}}$

したがって，$L_1 < L_2$ かつ $L_3 < L_1$ より　　$L_3 < L_1 < L_2$　（ヒ ④）