$\boxed{1}$

(1)　$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta \quad \cdots\cdots ①$$

の解を求めよう。以下では，$\alpha=\theta+\frac{\pi}{6}$，$\beta=2\theta$ とおく。このとき，① は

$$\sin\alpha=\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

となる。

(i)　二つの一般角 α と β が等しければ，$\sin\alpha$ と $\sin\beta$ は等しい。$\alpha=\beta$ を満たす θ は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ であり，これは ① の解の一つである。そして，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき

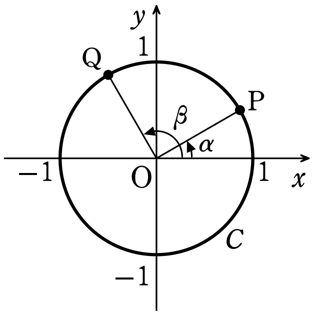
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta=\frac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる。

(ii)　太郎さんと花子さんは，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ 以外の ① の解を求める方法について話している。

太郎：角が等しくなくても，サインの値が等しくなることがあるね。
花子：サインの値が等しくなるのはどんなときか，単位円を用いて考えてみようか。

O を原点とする座標平面において，中心が O で，半径が 1 の円を C とする。さらに，α の動径と C との交点を P，β の動径と C との交点を Q とする。
ここで，動径は O を中心とし，その始線は x 軸の正の部分とする。



参考図

② が成り立つときに，点 P と点 Q の 間につねに成り立つ関係の記述として，次の ⓪ ～ ③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{エ}$ の解答群

⓪	点 P と点 Q は同じ点である。
①	点 P の x 座標と，点 Q の x 座標が等しい。
②	点 P の y 座標と，点 Q の y 座標が等しい。
③	点 P と点 Q は，原点 O に関して対称である。

(iii) $\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{\boxed{ア}}$ とする。

- $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の場合を考える。このとき，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であるので，② が成り立つとき，(ii) で考察したことに注意すると，α と β は

  $$\alpha + \beta = \boxed{オ}$$

  を満たすことがわかる。これより，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときの ① の解

  $$\theta = \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}\pi$$

  を得る。

- $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合を考える。このとき，$\pi < \beta < 2\pi$ であるので，② が成り立つとき，(ii) で考察したことに注意すると，α と β は

  $$\alpha + \beta = \boxed{ケ}$$

  を満たすことがわかる。これより，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のときの ① の解

  $$\theta = \frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シス}}\pi$$

  を得る。

以上より，$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，① の解は

$$\theta = \frac{\pi}{\boxed{ア}},\ \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}\pi,\ \frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シス}}\pi$$

である。

$\boxed{オ}$，$\boxed{ケ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① $\dfrac{\pi}{2}$	② π	③ $\dfrac{3}{2}\pi$
④ 2π	⑤ $\dfrac{5}{2}\pi$	⑥ 3π	⑦ $\dfrac{7}{2}\pi$

(2) $0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta$$

の解は

$$\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}},\quad \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\pi$$

である。

$\boxed{2}$

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて常用対数表を用いてもよい。

学校の池でメダカを飼うことが決まり，メダカの飼育係になった花子さんは，水質を良くする効果がある水草 A を水面に浮かべることにした。一方で，水草 A が増えすぎてメダカに悪影響を与えることを心配した花子さんは，水草 A を定期的に除去することにし，その作業の計画を立てるために次の**基本方針**を定めた。

基本方針

- 水草 A の量を水草 A が池の水面を覆う面積の割合 (%) で測ることにし，この量をもとに作業計画を立てる。
- 作業は正午に行う。

(1)　水草 A の増え方を知るために，観測を行った。次の表は，観測を開始した日を 0 日目として，0 日目，3 日目，6 日目，9 日目の正午に観測した水草 A の量を表したものである。

観測日(日目)	0	3	6	9
水草 A の量(%)	17.2	22.7	30.0	39.6

水草 A の量が 3 日ごとに何倍に増えるのかを計算して小数第 3 位を四捨五入したところ，いずれも 1.32 倍であることがわかった。水草 A の量は，3 日ごとにほとんど同じ倍率で増えていることから，「水草 A の量は，1 日ごとに一定の倍率で増える」と考え，その倍率を定数 r とした。

観測結果から，3 日目の水草 A の量は 0 日目の量の 1.32 倍になると考えた。このとき，r は $\boxed{\text{ア}}=1.32$ を満たす。$\log_{10}1.32=\boxed{\text{イ}}$ であるので

$$\log_{10}r=0.\boxed{\text{ウエオカ}}$$

が得られる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ r	① $\dfrac{r}{3}$	② $3r$	③ r^3	④ 3^r	⑤ $\log_3 r$

$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑦ のうちから一つ選べ。

⓪ 0.0899	① 0.1206	② 0.1523	③ 0.2148
④ 0.2405	⑤ 0.3010	⑥ 0.3636	⑦ 0.4771

(2)　花子さんは，**基本方針**に次の**条件**を加えて，作業計画を立てることにした。

条件

- 作業は 14 日ごとに行う。
- 作業の後に残す水草 A の量を，次回の作業までの間に水草 A の量がつねに 60 % を超えない範囲で，できるだけ多くする。

作業の後に残す水草 A の量について考える。
作業を行った日を 0 日目として，次回の作業は 14 日目に行う。なお，作業にかかる時間は考えないものとする。
次のような実数 a を考える。作業の後に残す水草 A の量を a % としたとき，14 日目の正午に水草 A の量がちょうど 60 % になる。
このとき，(1) の定数 r を用いると，14 日目の正午に水草 A の量は a の $\boxed{キ}$ 倍になるので

$$a \times \boxed{キ} = \boxed{クケ} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。
① の両辺の常用対数をとり，(1) で求めた $\log_{10} r = 0.\boxed{ウエオカ}$ と $\log_{10} 6 = 0.7782$ であることを用いると，$\log_{10} a = \boxed{コ}$ となる。
a の決め方から，作業の後に残す水草Aの量を a % 以下にすれば，次回の作業までの間に水草 A の量がつねに 60 % を超えないことがわかる。a 以下で最大の整数は $\boxed{サシ}$ であることから，花子さんは作業の後に残す水草 A の量を $\boxed{サシ}$ % にすることとした。

$\boxed{キ}$ の解答群

⓪ r	① $\dfrac{r}{14}$	② $14r$	③ r^{14}	④ 14^r	⑤ $\log_{14} r$

$\boxed{コ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑦ のうちから一つ選べ。

⓪ 0.7758	① 1.0670	② 1.0934	③ 1.2154
④ 1.3410	⑤ 1.4894	⑥ 1.7806	⑦ 2.4666

$\boxed{3}$

s，t を実数とする。座標空間に 3 点 A $(-4,\ -1,\ 0)$，B $(-3,\ 0,\ -1)$，
P $(s,\ t,\ -2s+t-1)$ がある。

(1)　3 点 A，B，P は一直線上にないことを示せ。

(2)　点 P から直線 AB に下ろした垂線を PH とする。点 H の座標を s を用いて表せ。

(3)　s，t が変化するとき，三角形 ABP の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$

投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある。A，B，C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う。

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる。
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる。

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる。
最初の文字列は ABC であるとする。コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし，BCA である確率を q_n とする。

(1)　k を正の整数とするとき，$p_{2k}-q_{2k}$ を求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき，p_n を求めよ。

$\boxed{5}$

n^4+6n^2+23 が n^2+n+3 で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ。

$\boxed{6}$

正の整数 x，y，z を用いて

$$N=9z^2=x^6+y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ。