高2理系数学総合S　課題（12月26日まで）～積分計算～

$\boxed{1}$

定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(\sin x)}{\tan x}dx$ を求めよ。

$\boxed{2}$

自然数 n に対し $I_n=\displaystyle\int_0^{2\pi n} e^{-x}\cos x\,dx$，$J_n=\displaystyle\int_0^{2\pi n} e^{-x}\sin x\,dx$ とおく。I_n と J_n を求め，さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n$ を求めよ。

$\boxed{3}$

実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ が等式 $f(x)=\sin^2 x+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{4}$

関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin|x-t|\,dt$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最小値および最大値を求めよ。

$\boxed{5}$

関数 $f(x)$ が条件 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)^2e^t dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{6}$

極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2x-\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{t\sin t}{2+\cos t}dt$ を求めよ。

$\boxed{7}$

$x_0=0$ とする。n を自然数とし，正の実数からなる数列 x_1，……，x_n を $k=1$，……，n に対して $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} 2x\,dx=\frac{1}{n}$ を満たすものとする。

(1)　x_k を求めよ。

(2)　$S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ とするとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{8}$

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上に点 P_k $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ を $\angle\mathrm{P}_k\mathrm{OA}=\dfrac{k}{n}\pi$ を満たすようにとる。ただし，$\mathrm{O}\,(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\,(2,\ 0)$ とする。

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\mathrm{OP}_1{}^2}+\frac{1}{\mathrm{OP}_2{}^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\mathrm{OP}_n{}^2}\right)$ を求めよ。

$\boxed{9}$

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ の値を求めよ。

(2)　3 以上の整数 n に対して，不等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}dx<\frac{\pi}{6}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{10}$

自然数 n に対して，$I(n)=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x^2}dx$ とおく。

(1)　等式 $I(n+2)=-\dfrac{1}{2}e^{-1}+\dfrac{n+1}{2}I(n)$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $0\leqq I(n)\leqq\dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI(n)$ を求めよ。

1

$\log(\sin x)=t$ とおくと　$\dfrac{\cos x}{\sin x}dx=dt$，$\dfrac{dx}{\tan x}=dt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$\dfrac{\pi}{6}$	$\to$	$\dfrac{\pi}{4}$
t	$\log\dfrac{1}{2}$	$\to$	$\log\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\log(\sin x)}{\tan x}dx=\int_{\log\frac{1}{2}}^{\log\frac{1}{\sqrt{2}}}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\log\frac{1}{2}}^{\log\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\log 2\right)^2-\frac{1}{2}(-\log 2)^2=-\frac{3}{8}(\log 2)^2$$

2

$$I_n=\int_0^{2\pi n}e^{-x}\cos x\,dx=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{2\pi n}-\int_0^{2\pi n}(-e^{-x})(-\sin x)dx$$

$$=-e^{-2\pi n}+1-J_n$$

$$J_n=\int_0^{2\pi n}e^{-x}\sin x\,dx=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{2\pi n}-\int_0^{2\pi n}(-e^{-x})\cos x\,dx=I_n$$

よって　$I_n+J_n=1-e^{-2\pi n}$　……①，　$J_n=I_n$　……②

①，②から　$I_n=J_n=\dfrac{1}{2}(1-e^{-2\pi n})$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}J_n=\frac{1}{2}$

3

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=k$（$k$ は定数）とおくと　$f(x)=\sin^2 x+k$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+k)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)+k\right\}dt$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+kt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$$

よって，$k=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$ から　$k=\dfrac{\pi}{2(2-\pi)}$

したがって　$f(x)=\sin^2 x+\dfrac{\pi}{2(2-\pi)}$

4

$0\leqq t\leqq x$ のとき　$x-t\geqq 0$

$x\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$x-t\leqq 0$

よって　$\displaystyle f(x)=\int_0^x\sin(x-t)dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\sin(t-x)dt=\Big[\cos(x-t)\Big]_0^x+\Big[-\cos(t-x)\Big]_x^{\frac{\pi}{2}}$

$$=1-\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1=2-\sin x-\cos x$$

$$=2-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

したがって　$f(x)$ の最小値は $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ すなわち $x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき　$2-\sqrt{2}$，

最大値は $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち $x=0$，$\dfrac{\pi}{2}$ のとき　1

5

(1)　$\displaystyle f(x)=\int_0^x(x-t)^2e^t dt=\int_0^x(x^2-2tx+t^2)e^t dt=x^2\int_0^x e^t dt-2x\int_0^x te^t dt+\int_0^x t^2e^t dt$

よって　$\displaystyle f'(x)=2x\int_0^x e^t dt+x^2e^x-2\int_0^x te^t dt-2x\cdot xe^x+x^2e^x=2x\int_0^x e^t dt-2\int_0^x te^t dt$

ここで　$\displaystyle\int_0^x e^t dt=\Big[e^t\Big]_0^x=e^x-1$

$$\int_0^x te^t dt=\Big[te^t\Big]_0^x-\int_0^x e^t dt=xe^x-(e^x-1)=(x-1)e^x+1$$

したがって　$f'(x)=2x(e^x-1)-2\{(x-1)e^x+1\}=2e^x-2x-2$

(2)　(1) から　$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2e^x-2x-2)dx=2e^x-x^2-2x+C$

$f(0)=\int_0^0(x-t)^2e^t dt=0$ であるから

$2+C=0$　　すなわち　$C=-2$

よって　$f(x)=2e^x-x^2-2x-2$

6

$F(t)=\int\frac{t\sin t}{2+\cos t}dt$ とおくと　$F'(t)=\frac{t\sin t}{2+\cos t}$

よって

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2x-\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{t\sin t}{2+\cos t}dt=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{F(x)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{2+\cos\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{8}$$

7

(1) $\int_{x_{k-1}}^{x_k}2x\,dx={x_k}^2-{x_{k-1}}^2$　　よって　${x_k}^2-{x_{k-1}}^2=\frac{1}{n}$

$k=1$ のとき，${x_1}^2-{x_0}^2=\frac{1}{n}$ であることと，$x_0=0$ から　${x_1}^2=\frac{1}{n}$

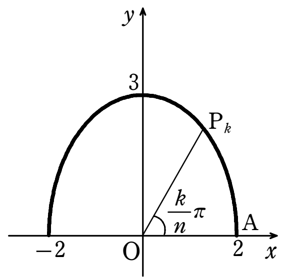
ゆえに，数列 $\{{x_k}^2\}$ は，初項 $\frac{1}{n}$，公差 $\frac{1}{n}$ の等差数列である。

よって　${x_k}^2=\frac{1}{n}+(k-1)\cdot\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$

$x_k>0$ であるから　$x_k=\sqrt{\frac{k}{n}}$

(2) $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

8



点 P_k の座標は次のように表すことができる。

$$\left(OP_k\cos\frac{k}{n}\pi,\ OP_k\sin\frac{k}{n}\pi\right)$$

点 P_k は楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 上にあるから

$${OP_k}^2\left(\frac{1}{4}\cos^2\frac{k}{n}\pi+\frac{1}{9}\sin^2\frac{k}{n}\pi\right)=1$$

よって　$\frac{1}{{OP_k}^2}=\frac{1}{4}\cos^2\frac{k}{n}\pi+\frac{1}{9}\sin^2\frac{k}{n}\pi$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{{OP_1}^2}+\frac{1}{{OP_2}^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{{OP_n}^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}\pi+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k}{n}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\cos^2\pi x\,dx+\frac{1}{9}\int_0^1\sin^2\pi x\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1(1+\cos2\pi x)dx+\frac{1}{18}\int_0^1(1-\cos2\pi x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right]_0^1+\frac{1}{18}\left[x-\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right]_0^1=\frac{13}{72}$$

9

(1) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ において，$x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\ \to\ \frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{3}$

よって　$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(2)　$n\geqq 3$ のとき，$0\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ (<1) において，$0\leqq x^n\leqq x^2$ であるから

$$0\leqq\frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}\leqq\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^n}}dx\leqq\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}<\frac{\pi}{6}$

$\boxed{10}$

(1)　$\displaystyle I(n+2)=\int_0^1 x^{n+2}e^{-x^2}dx=\int_0^1 x^{n+1}\cdot xe^{-x^2}dx=\int_0^1 x^{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)'dx$

$$=\left[x^{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\right]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{n+1}{2}I(n)$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において $0\leqq x^ne^{-x^2}\leqq x^n$ であるから　$\displaystyle 0\leqq I(n)\leqq\int_0^1 x^n dx$

よって　$\displaystyle 0\leqq I(n)\leqq\frac{1}{n+1}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I(n)=0$

また，(1) から　$\displaystyle I(n)=\frac{2}{n+1}\left\{I(n+2)+\frac{1}{2e}\right\}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nI(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}\left\{I(n+2)+\frac{1}{2e}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\left\{I(n+2)+\frac{1}{2e}\right\}$

$$=\frac{1}{e}$$