$\boxed{1}$

(1)　次の**問題 A** について考えよう。

> **問題 A**　関数 $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}=\frac{1}{2}$$

であるから，三角関数の合成により

$$y=\boxed{\text{イ}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}\right)$$

と変形できる。よって，y は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(2)　p を定数とし，次の**問題 B** について考えよう。

> **問題 B**　関数 $y=\sin\theta+p\cos\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

(i)　$p=0$ のとき，y は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

(ii)　$p>0$ のときは，加法定理

$$\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$$

を用いると

$$y=\sin\theta+p\cos\theta=\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\cos(\theta-\alpha)$$

と表すことができる。ただし，α は

$$\sin\alpha=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}},\quad \cos\alpha=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。このとき，y は $\theta=\boxed{\text{コ}}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

(iii)　$p<0$ のとき，y は $\theta=\boxed{\text{シ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる。

$\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ -1	① 1	② $-p$
③ p	④ $1-p$	⑤ $1+p$
⑥ $-p^2$	⑦ p^2	⑧ $1-p^2$
⑨ $1+p^2$	ⓐ $(1-p)^2$	ⓑ $(1+p)^2$

$\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① α	② $\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{2}$

二つの関数 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ について考える。

(1) $f(0)=\boxed{\text{ア}}$，$g(0)=\boxed{\text{イ}}$ である。また，$f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から，

$x=\boxed{\text{ウ}}$ で最小値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

$g(x)=-2$ となる x の値は $\log_2\left(\sqrt{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}\right)$ である。

(2) 次の ① ～ ④ は，x にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$f(-x)=\boxed{\text{キ}}$ …… ①

$g(-x)=\boxed{\text{ク}}$ …… ②

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\boxed{\text{ケ}}$ …… ③

$g(2x)=\boxed{\text{コ}}\,f(x)g(x)$ …… ④

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $f(x)$	① $-f(x)$	② $g(x)$	③ $-g(x)$

(3) 花子さんと太郎さんは，$f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子：① ～ ④ は三角関数の性質に似ているね。
太郎：三角関数の加法定理に類似した式 (A) ～(D) を考えてみたけど，つねに成り立つ式はあるだろうか。
花子：成り立たない式を見つけるために，式 (A) ～ (D) の β に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。

太郎さんが考えた式

$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)$ …… (A)

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ …… (B)

$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ …… (C)

$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)$ …… (D)

(1)，(2) で示されたことのいくつかを利用すると，式 (A) ～ (D) のうち，$\boxed{\text{サ}}$ 以外の三つは成り立たないことがわかる。$\boxed{\text{サ}}$ は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ (A)	① (B)	② (C)	③ (D)

$\boxed{3}$

(1) 座標平面上で，次の二つの 2 次関数のグラフについて考える。

$y=3x^2+2x+3$ …… ①

$y=2x^2+2x+3$ …… ②

①，② の 2 次関数のグラフには次の**共通点**がある。

共通点

・y 軸との交点における接線の方程式は $y=\boxed{ア}x+\boxed{イ}$ である。

次の ⓪ ～ ⑤ の 2 次関数のグラフのうち，y 軸との交点における接線の方程式が $y=\boxed{ア}x+\boxed{イ}$ となるものは $\boxed{ウ}$ である。

$\boxed{ウ}$ の解答群

⓪ $y=3x^2-2x-3$	① $y=-3x^2+2x-3$
② $y=2x^2+2x-3$	③ $y=2x^2-2x+3$
④ $y=-x^2+2x+3$	⑤ $y=-x^2-2x+3$

a，b，c を 0 でない実数とする。

曲線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点 $\left(0, \boxed{エ}\right)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は $y=\boxed{オ}x+\boxed{カ}$ である。

接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$ である。

a，b，c が正の実数であるとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ と接線 ℓ および直線 $x=\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$ で囲まれた図形の面積を S とすると

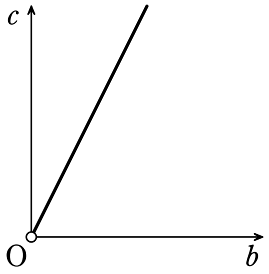
$$S=\frac{ac^{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}\,b^{\boxed{シ}}} \quad \cdots\cdots ③$$

である。

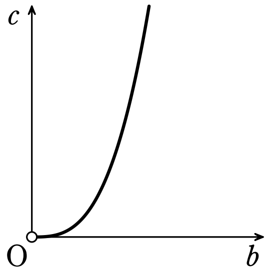
③ において，$a=1$ とし，S の値が一定となるように正の実数 b，c の値を変化させる。このとき，b と c の関係を表すグラフの概形は $\boxed{ス}$ である。

$\boxed{ス}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

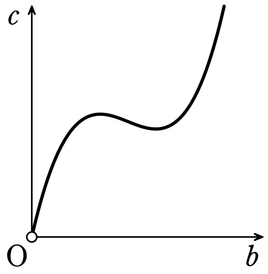
⓪



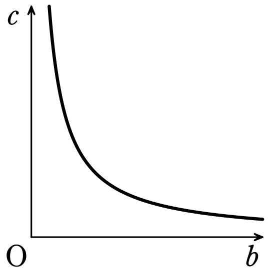
①



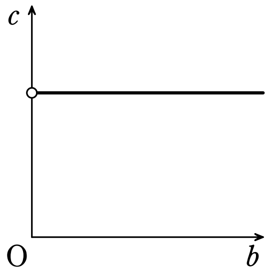
②



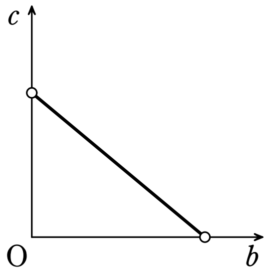
③



④



⑤



(2)　a，b，c，d を 0 でない実数とする。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とする。このとき，関数 $y=f(x)$ のグラフと y 軸との交点における接線の方程式は $y=\boxed{\text{セ}}\,x+\boxed{\text{ソ}}$ である。

次に，$g(x)=\boxed{\text{セ}}\,x+\boxed{\text{ソ}}$ とし，$f(x)-g(x)$ について考える。

$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ と $\boxed{\text{テ}}$ である。

また，x が $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ と $\boxed{\text{テ}}$ の間を動くとき，$|f(x)-g(x)|$ の値が最大となるのは，

$x=\dfrac{\boxed{\text{トナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ のときである。

4

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

(1)　a を正の整数とする。

2，4，6，……，$2a$ の数字がそれぞれ一つずつ書かれた a 枚のカードが箱に入っている。この箱から 1 枚のカードを無作為に取り出すとき，そこに書かれた数字を表す確率変数を X とする。

このとき，$X=2a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

$a=5$ とする。

X の平均 (期待値) は $\boxed{\text{ウ}}$，X の分散は $\boxed{\text{エ}}$ である。また，s，t は定数で $s>0$ のとき，$sX+t$ の平均が 20，分散が 32 となるように s，t を定めると，$s=\boxed{\text{オ}}$，$t=\boxed{\text{カ}}$ である。

このとき，$sX+t$ が 20 以上である確率は 0.$\boxed{\text{キ}}$ である。

(2)　(1) の箱のカードの枚数 a は 3 以上とする。

この箱から 3 枚のカードを同時に取り出し，それらのカードを横 1 列に並べる。

この試行において，カードの数字が左から小さい順に並んでいる事象を A とする。

このとき，事象 A の起こる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

この試行を 180 回繰り返すとき，事象 A が起こる回数を表す確率変数を Y とすると，Y の平均 m は $\boxed{\text{コサ}}$，Y の分散 σ^2 は $\boxed{\text{シス}}$ である。

ここで，事象 A が 18 回以上 36 回以下起こる確率の近似値を次のように求めよう。

試行回数 180 は大きいことから，Y は近似的に平均 $m=\boxed{\text{コサ}}$，標準偏差 $\sigma=\sqrt{\boxed{\text{シス}}}$ の正規分布に従うと考えられる。

ここで，$Z=\dfrac{Y-m}{\sigma}$ とおくと，求める確率の近似値は次のようになる。

$$P(18\leqq Y\leqq 36)=P\left(-\boxed{\text{セ}}.\boxed{\text{ソタ}}\leqq Z\leqq \boxed{\text{チ}}.\boxed{\text{ツテ}}\right)=0.\boxed{\text{トナ}}$$

(3)　ある都市での世論調査において，無作為に 400 人の有権者を選び，ある政策に対する賛否を調べたところ，320 人が賛成であった。この都市の有権者全体のうち，この政策の賛成者の母比率 p に対する信頼度 95 %の信頼区間を求めたい。

この調査での賛成者の比率 (以下，これを標本比率という) は 0.$\boxed{\text{ニ}}$ である。

標本の大きさが 400 と大きいので，二項分布の正規分布による近似を用いると，p に対する信頼度 95 %の信頼区間は $0.\boxed{\text{ヌネ}}\leqq p\leqq 0.\boxed{\text{ノハ}}$ である。

母比率 p に対する信頼区間 $A\leqq p\leqq B$ において，$B-A$ をこの信頼区間の幅とよぶ。

以下，R を標本比率とし，p に対する信頼度 95 %の信頼区間を考える。

　上で求めた信頼区間の幅を L_1

　標本の大きさが 400 の場合に $R=0.6$ が得られたときの信頼区間の幅を L_2

　標本の大きさが 500 の場合に $R=0.8$ が得られたときの信頼区間の幅を L_3

とする。このとき，L_1，L_2，L_3 について $\boxed{\text{ヒ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{ヒ}}$ に当てはまるも

のを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ $L_1 < L_2 < L_3$　　① $L_1 < L_3 < L_2$　　② $L_2 < L_1 < L_3$

③ $L_2 < L_3 < L_1$　　④ $L_3 < L_1 < L_2$　　⑤ $L_3 < L_2 < L_1$

$\boxed{5}$

s を定数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する。

$$a_1=\frac{1}{2},\qquad a_{n+1}=\frac{2a_n+s}{a_n+2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\quad \cdots\cdots ①$$

(1)　$s=4$ とする。$a_2=\boxed{\text{ア}}$，$a_{100}=\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$s=0$ とする。$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_1=\boxed{\text{ウ}}$ である。

さらに，b_n と b_{n+1} は関係式　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ を満たすから，$\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{n+\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3)　$s=1$ とする。$c_n=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$ とおくと，$c_1=\boxed{\text{ク}}$ である。

さらに，c_n と c_{n+1} の関　係式を求め，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めることにより，$\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{\text{ケ}}-\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}^{\boxed{\text{シ}}}+1}$ であることがわかる。

ただし，$\boxed{\text{シ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ④ のうちから一つ選べ。

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

(4)　(3) の数列 $\{c_n\}$ について $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k c_{k+1}=\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\left(\boxed{\text{タ}}^{n}-1\right)$ である。

次に，(3) の数列 $\{a_n\}$ について考える。$s=1$ であることに注意して，① の漸化式を変形すると $a_n a_{n+1}=\boxed{\text{チ}}(a_n-a_{n+1})+\boxed{\text{ツ}}$ である。

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}=\boxed{\text{テ}}+\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{サ}}^{\boxed{\text{ナ}}}+\boxed{\text{ニ}}}$ である。

ただし，$\boxed{\text{テ}}$ と $\boxed{\text{ナ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ④ のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

$\boxed{6}$

点 O を原点とする座標空間に 3 点 P (0, 6, 3), Q (4, −2, −5), R (12, 0, −3) がある。3 点 O，P，Q の定める平面を α とし，α 上で ∠POQ の二等分線 ℓ を考える。ℓ 上に点 A を，$|\overrightarrow{OA}|=9$ かつ x 座標が正であるようにとる。また，α 上に点 H を，$\overrightarrow{HR}\perp\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{HR}\perp\overrightarrow{OQ}$ であるようにとる。

(1) $|\overrightarrow{OP}|=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$，$|\overrightarrow{OQ}|=\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$ であるから，A の座標は

$\left(\boxed{オ},\ \boxed{カ},\ \boxed{キク}\right)$ であることがわかる。

(2) 点 H の座標と線分 HR の長さを求めよう。$\overrightarrow{OP}\perp\vec{n}$, $\overrightarrow{OQ}\perp\vec{n}$ であるベクトル

$\vec{n}=\left(2,\ \boxed{ケコ},\ \boxed{サ}\right)$ に対し，$\overrightarrow{HR}=k\vec{n}$ とおくと $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OR}-k\vec{n}$ である。

$\overrightarrow{OH}\cdot\vec{n}=\boxed{シ}$ であるから，$k=\boxed{ス}$ である。したがって，H の座標は

$\left(\boxed{セ},\ \boxed{ソ},\ \boxed{タチ}\right)$ であり，HR の長さは $\boxed{ツ}$ である。

(3) 平面 α 上で点 A を中心とする半径 1 の円 C を考える。点 B が C 上を動くとき，線分 RB の長さの最大値と，そのときの B の座標を求めよう。

A と H の間の距離は $\boxed{テ}$ である。よって，RB の長さの最大値は $\sqrt{\boxed{トナ}}$ である。

また，RB の長さが最大となる B は $\overrightarrow{HB}=\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\overrightarrow{HA}$ を満たすから，求める B の座標

は $\left(\dfrac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハ}},\ \dfrac{\boxed{ヒフ}}{\boxed{ハ}},\ \dfrac{\boxed{ヘホ}}{\boxed{ハ}}\right)$ である。

$\boxed{7}$

複素数 $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$w=b(\cos\beta+i\sin\beta)$ は

$$zw=4i,\qquad \arg\frac{z}{w}=60^\circ$$

を満たしているとする。ただし，a，b は正の実数，α，β は 0° 以上 180° 以下の角とし，

$\arg\dfrac{z}{w}$ は $\dfrac{z}{w}$ の偏角を表す。

(1)　このとき $ab=\boxed{\text{ア}}$，$\alpha+\beta=\boxed{\text{イウ}}^\circ$，$\alpha-\beta=\boxed{\text{エオ}}^\circ$ である。したがって

$\alpha=\boxed{\text{カキ}}^\circ$，$\beta=\boxed{\text{クケ}}^\circ$ である。

(2)　$0^\circ<\theta<180^\circ$ を満たす θ に対して

$$z'=z(\cos\theta+i\sin\theta),\quad w'=w(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とおく。積 $z'w'$ と和 $z'+w'$ がともに実数になるような a，b，θ の値を求めよう。

まず，積 $z'w'$ が実数となるのは，$\theta=\boxed{\text{コサ}}^\circ$ または $\theta=\boxed{\text{シスセ}}^\circ$ のときである。

$\theta=\boxed{\text{コサ}}^\circ$ のとき，和 $z'+w'$ の虚部は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\boxed{\text{ソ}}+\boxed{\text{タ}}\right)$ である。

$\left(\boxed{\text{ソ}}\right.$ と $\boxed{\text{タ}}$ は解答の順序を問わない。$\left.\right)$

したがって，この場合 $z'+w'$ は実数にはならない。

また，$\theta=\boxed{\text{シスセ}}^\circ$ のとき，$z'+w'$ の虚部は $\dfrac{1}{2}\left(\boxed{\text{チ}}-\boxed{\text{ツ}}\right)$ である。

したがって，和 $z'+w'$ も実数となるような a，b，θ の値は，それぞれ

$a=\boxed{\text{テ}}$，$b=\boxed{\text{ト}}$，$\theta=\boxed{\text{シスセ}}^\circ$ である。そのとき z'，w' は2次方程式

$\boxed{\text{ナ}}$ の解になる。ただし，$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑨ から一つ選べ。

⓪　$x^2+2x+4=0$	①　$x^2+2x-4=0$
②　$x^2-2x+4=0$	③　$x^2-2x-4=0$
④　$x^2+\sqrt{3}x+4=0$	⑤　$x^2+\sqrt{3}x-4=0$
⑥　$x^2+2\sqrt{3}x+4=0$	⑦　$x^2+2\sqrt{3}x-4=0$
⑧　$x^2-2\sqrt{3}x+4=0$	⑨　$x^2-2\sqrt{3}x-4=0$