$\boxed{1}$

(解説)

(1)　点 P と点 Q が一致するとき

$$\cos 2t = \sin t \quad \cdots\cdots ①, \qquad \cos t = \sin 2t \quad \cdots\cdots ②$$

① より　$1-2\sin^2 t = \sin t$

$2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0$

$(2\sin t - 1)(\sin t + 1) = 0$

よって　$\sin t = \dfrac{1}{2},\ -1$

また，② より　$\cos t = 2\sin t\cos t \quad \cdots\cdots ②'$

$\sin t = \dfrac{1}{2}$ のとき，②′ は $\cos t = \cos t$ となるから，すべての実数 t で成り立つ。

よって　$t = \dfrac{\pi}{6} + 2n_1\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi + 2n_2\pi$　(n_1，n_2 は整数)

$\sin t = -1$ のとき，②′ は $\cos t = -2\cos t$ であるから　$\cos t = 0$

よって　$t = \dfrac{3}{2}\pi + 2n_3\pi$　(n_3 は整数)

以上より　$t = \dfrac{\pi}{6} + 2n_1\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi + 2n_2\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi + 2n_3\pi$　(n_1，n_2，n_3 は整数)

(2)　$x = \cos 2t$，$y = \cos t$ とおくと　$x = 2y^2 - 1$

$0 < t < 2\pi$ より　$-1 \leqq y < 1$

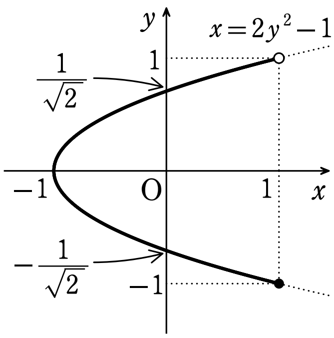
$x = 0$ のとき　$y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$y = 0$ のとき　$x = -1$

よって，$x = 2y^2 - 1$ のグラフと x 軸との共有点は

$(-1,\ 0)$

y 軸との共有点の座標は　$\left(0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

したがって，点 P の軌跡は放物線 $x = 2y^2 - 1$ の $-1 \leqq y < 1$ の部分であり，図示すると右の図のようになる。



$\boxed{2}$

(解説)

(1)　サイコロの出た目が必ず n の約数となるための条件は，n が 1，2，3，4，5，6 の公倍数となることである。

$4=2^2$，$6=2\cdot3$ であるから，1 から 6 までの整数の最小公倍数は

$$2^2\cdot3\cdot5=60$$

よって，n は 60 の倍数であり，小さい順に 3 つ求めると

$$n=60,\ 120,\ 180$$

(2)　「1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\frac{5}{6}$」……①　とする。

n が ① を満たすとき，1 から 6 までの 6 つの整数のうち，1 つだけ n の約数でないものが存在する。

1 はすべての自然数の約数である。

また，$2\times3=6$ より，2，3，6 のうち 2 つのみが約数になることはない。

ゆえに，n は 4 または 5 のうちの一方を約数にもたない。

n が 4 を約数にもたないとき，n は 1，2，3，5，6 の公倍数だが，4 の倍数でない。

すなわち，n は 30 の倍数だが 60 の倍数でない。　……②

n が 5 を約数にもたないとき，n は 1，2，3，4，6 の公倍数だが，5 の倍数ではない。

すなわち，n は 12 の倍数だが 60 の倍数でない。　……③

また，30 と 12 の最小公倍数は 60 であるから，② と ③ を同時に満たすような n は存在しない。

したがって，n が ① を満たすための条件は，n が ② または ③ を満たすことである。

このような n を小さい順に 3 つ求めると　　$n=12,\ 24,\ 30$

(3)　サイコロを 3 回投げるとき，目の出方は全部で　　6^3 通り

$160=2^5\cdot5$ であるから，サイコロを 3 回投げて出た目の積が 160 の約数になるための条件は，出た目の積を素因数分解したとき，素因数 2 が 5 個以下，素因数 5 が 1 個以下で，その他の素因数をもたないことである。

[1]　5 が 1 回だけ出るとき

他の出た目は，1，2，4 のいずれかであればよい。

5 が出た順番の選び方が 3 通りあり，そのおのおのについて，1，2，4 の目の出方が 3^2 通りあるから　　$3\times3^2=27$ (通り)

[2]　5 が 1 回も出ないとき

出た目は，1，2，4 のいずれかで，4 が 3 回出なければよいから　　$3^3-1=26$ (通り)

[1]，[2] から，出た目の積が 160 の約数となる場合は　　$27+26=53$ (通り)

したがって，求める確率は　　$\frac{53}{6^3}=\frac{53}{216}$

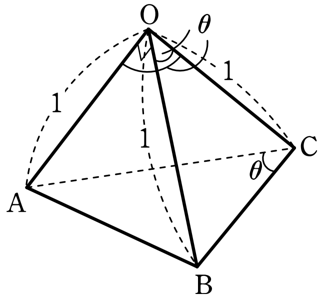
$\boxed{3}$

(解説)

$\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{ACB}=\theta$ とする。

$\triangle\mathrm{OAB}$ は $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ の直角二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$$



$\triangle\mathrm{OBC}$ において，余弦定理により

$$\mathrm{BC}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta=2(1-\cos\theta)$$

$\mathrm{BC}>0$ であるから

$$\mathrm{BC}=\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

同様にして　　$\mathrm{CA}=\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

さらに，$\triangle\mathrm{CAB}$ において，余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=\{\sqrt{2(1-\cos\theta)}\}^2+\{\sqrt{2(1-\cos\theta)}\}^2\\&\qquad-2\cdot\sqrt{2(1-\cos\theta)}\cdot\sqrt{2(1-\cos\theta)}\cdot\cos\theta\\&=4(1-\cos\theta)^2\end{aligned}$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　　$\mathrm{AB}=2(1-\cos\theta)$

$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ であるから　　$2(1-\cos\theta)=\sqrt{2}$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

ゆえに　　$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\sqrt{2\left(1-\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt[4]{2}$

$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

また，頂点 O から $\triangle\mathrm{ABC}$ に垂線 OH を下ろすと，斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから

$$\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}$$

このとき，$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=\mathrm{CH}$ であるから，点 H は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心である。

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ において，正弦定理により

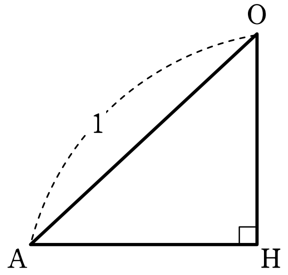
$$\frac{\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}}=2\mathrm{AH}$$

すなわち　　$\mathrm{AH}=\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}$

ゆえに，△OAH において，三平方の定理から

$$\mathrm{OH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}-1}}$$



したがって，四面体 OABC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{OH}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}{6}$$

$\boxed{4}$

(解説)

曲線 C と直線 $y=ax+b$ が異なる 2 つの共有点をもつとき，方程式

$x^2-4x+5=ax+b$ が $x>1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつ。

方程式を変形すると　　$x^2-(a+4)x-b+5=0$　……①

$f(x)=x^2-(a+4)x-b+5$ とし，2 次方程式 ① の判別式を D とする。

曲線 $y=f(x)$ は下に凸の放物線であり，その軸は直線 $x=\dfrac{a+4}{2}$ である。

2 次方程式 ① が $x>1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は，曲線 $y=f(x)$ が x 軸の $x>1$ の部分と，異なる 2 点で交わることである。

すなわち，次の [1] ～ [3] が同時に成り立つことである。

[1]　$D>0$　　　[2]　軸が $x>1$ の範囲にある　　　[3]　$f(1)>0$

[1]　$D=\{-(a+4)\}^2-4\cdot1\cdot(-b+5)=(a+4)^2+4(b-5)$

$D>0$ から　　$(a+4)^2+4(b-5)>0$

よって　　$b>-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5$　……②

[2]　軸 $x=\dfrac{a+4}{2}$ について　　$\dfrac{a+4}{2}>1$

すなわち　　$a>-2$　……③

[3]　$f(1)>0$ から　　$1^2-(a+4)\cdot1-b+5>0$

よって　　$b<-a+2$　……④

② かつ ③ かつ ④ から

$$a>-2 \quad \text{かつ} \quad -\frac{(a+4)^2}{4}+5<b<-a+2$$

ここで，曲線 $b=-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5$ と直線 $b=-a+2$ の共有点の a 座標は，方程式

$-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5=-a+2$ の実数解である。

方程式を解くと，$(a+2)^2=0$ から　　$a=-2$

$a=-2$ のとき　　$b=4$

よって，曲線 $b=-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5$ と直線 $b=-a+2$ は点 $(-2,\ 4)$ で接する。

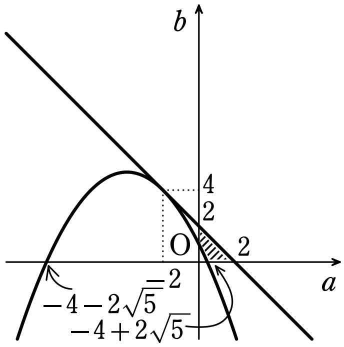
また，曲線 $b=-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5$ と a 軸の共有点の a 座標は，方程式 $-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5=0$ の

実数解である。

方程式を解くと，$a=-4\pm2\sqrt{5}$ であり，さらに $a>0$，$b>0$ であるから，点 $(a,\ b)$ の動く領域は，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線は含まない。

この領域の面積を S とすると



$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\int_0^{-4+2\sqrt{5}}\left\{-\frac{(a+4)^2}{4}+5\right\}da$$

$$=2-\left[-\frac{(a+4)^3}{12}+5a\right]_0^{-4+2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{50-20\sqrt{5}}{3}$$