冬期第5講　＜解答＞

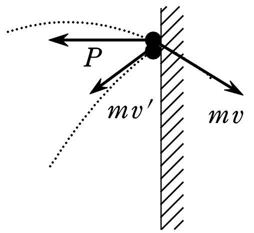
1 [2004 センター]

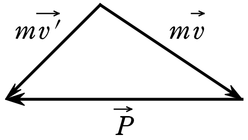
解答　(1)　③　　(2)　②　　(3)　①

(1)　小球の運動量の変化は，小球に与えられた力積に等しいので

$$m\vec{v'}-m\vec{v}=\vec{P}$$

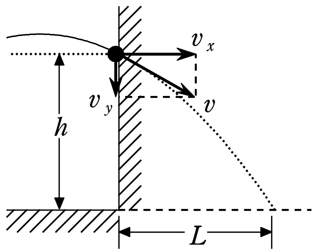
である。したがって，この関係を満たすように $\vec{P}$ を作図すると下図のようになる。





以上より，正しいものは ③ 。

(2)　小球が壁に衝突する直前の小球の速度の壁に垂直な向きの成分を v_x，鉛直方向の成分を v_y とすると，衝突後の壁に垂直な向きの成分 v_x' は，はねかえり係数が e なので



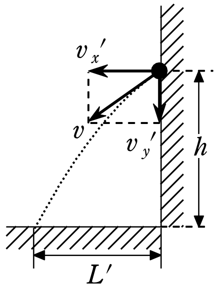
$$e=-\frac{v_x'}{v_x}\qquad よって\quad v_x'=-ev_x \quad \cdots\cdots ①$$

また，鉛直方向には力を受けないので衝突後の成分 v_y' は

$$v_y'=v_y \quad \cdots\cdots ②$$

となる。

　壁がなかったときの点 B からの鉛直方向の運動は，初速度 v_y の投げ下ろし運動である。また，壁で衝突したときの点 B からの鉛直方向の運動も初速度 $v_y'=v_y$ の投げ下ろし運動である。したがって，同じ距離 h だけ落下する時間 t は等しい。よって，斜方投射の水平方向は等速運動なので，壁がなかったときの水平到達距離 L は



$$L=|v_x|t \quad \cdots\cdots ③$$

また，壁で衝突したとき，その後は斜方投射なので，水平到達距離 L' は

$$L'=|v_x'|t=|-ev_x|t=e|v_x|t \quad \cdots\cdots ④$$

したがって，③，④ 式より

$$L'=eL$$

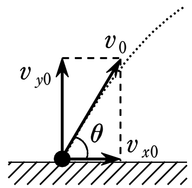
以上より，正しいものは ② 。

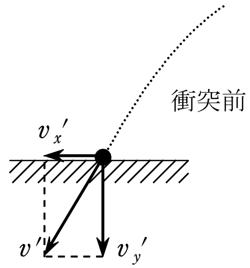
(3)　床に水平な方向を x 軸，鉛直方向を y 軸とし，打ち出した瞬間の小球の速度の x 成分を v_{x0}，y 成分を v_{y0} とする。

　小球は，点 B で衝突するまで斜方投射運動を行うので，x 方向には等速運動をする。よって，点 B で衝突した直後の x 成分は，① 式より

$$v_x'=-ev_x=-ev_{x0}$$

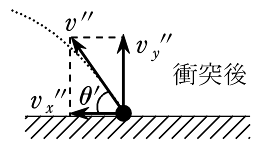
となる。その後，点 C で衝突するまでも斜方投射運動を行うので，x 方向には等速運動をする。また，点 C の衝突では x 方向には力がはたらかないので，速度の x 成分は変化しない。よって，点 C で衝 突した直後の x 成分は





$$v_x''=v_x'=-ev_{x0} \quad \cdots\cdots ⑤$$

点 B での衝突では，y 方向に力がはたらかないので，速度の y 成分は変化しない。よって，点 C に落下してきたときの y 成分は，打ち出した瞬間の y 成分と大きさが等しく逆向きで



$$v_y'=-v_{y0}$$

また，点 C で衝突した直後の速度の y 成分を v_y'' とすると，はねかえり係数から

$$e=-\frac{v_y''}{v_y'}$$

よって，

$$v_y''=-ev_y'=ev_{y0} \quad \cdots\cdots ⑥$$

したがって，⑤，⑥ より

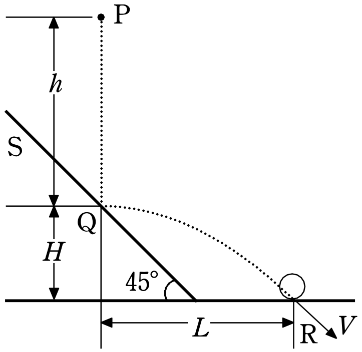
$$\tan\theta' = \frac{|v_y''|}{|v_x''|} = \frac{|ev_{y0}|}{|-ev_{x0}|} = \frac{|v_{y0}|}{|v_{x0}|} = \tan\theta$$

以上より，正しいものは ①。

2 [2003 センター]

解答 (1) ③ (2) ⑤ (3) ②

(1) 点 Q での衝突は弾性衝突なので，速度の向きは変化するが大きさは同じで，力学的エネルギーは保存する。したがって，小球の質量を m，点 R に達する直前の速さを V とすると，点 P と点 R での力学的エネルギー保存の法則より

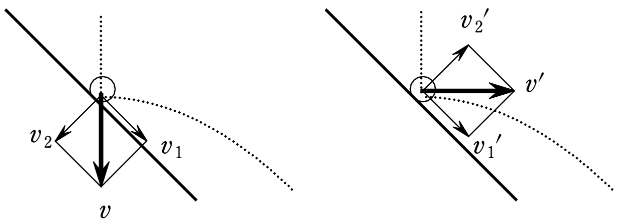


$$mg(h+H) = \frac{1}{2}mV^2$$

よって $V = \sqrt{2g(h+H)}$

以上より答えは ③。

(2) 斜面Sに衝突する直前の球の速さをv，その斜面に平行な成分を v_1，垂直な成分を v_2 とする。斜面はなめらかなので斜面に平行な向きに力ははたらかない。よって，衝突後の速さ v'の斜面に平行な成分 v_1' は



$$v_1' = v_1$$

となる。また，斜面に垂直な成分 v_2' は，弾性衝突により反発係数が 1 なので

$$\frac{v_2'}{v_2} = 1$$

よって $v_2' = v_2$

であり，大きさが同じで逆向きになる。したがって，v' は v と同じ大きさで，斜面に対して 45° になり，衝突後の球は初速度 v' の水平投射運動をする。

ここで，点 P と点 Q での力学的エネルギー保存の法則から

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

よって $v = \sqrt{2gh}$

なので $v' = v = \sqrt{2gh}$ ……①

また，点 Q で衝突してから R に落下するまでの時間を t とすると

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{よって} \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad \cdots\cdots ②$$

となるので，①，② より

$$L = v't = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 2\sqrt{H}\sqrt{h}$$

となる。よって，L は h の平方根に比例し，図 1 から $L > H$ なので

$$2\sqrt{H}\sqrt{h} > H$$

よって $h > \dfrac{H}{4}$

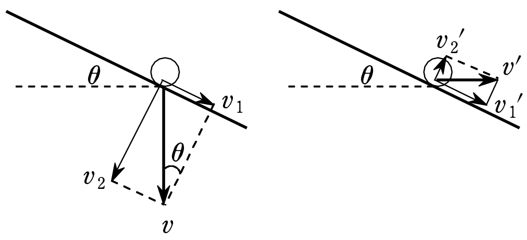
また，$h = H$ のとき

$$L = 2\sqrt{H}\sqrt{H} = 2H$$

となる。

以上より，最も適当なものは ⑤。

(3) 斜面 S′ に衝突する瞬間の球の速さを v，その斜面に平行な成分を v_1，垂直な成分を v_2 とする。斜面はなめらかなので，斜面に平行な向きに力がはたらかない。よって，衝突後の速さ v' の斜面に平行な成分 v_1' は



$$v_1' = v_1$$

となる。また，斜面に垂直な成分 v_2' は，反発係数が e なので

$$\frac{v_2'}{v_2} = e$$

よって $v_2' = ev_2$

である。

ここで，衝突後の球が水平にはねかえるには

$$\frac{v_2'}{v_1'}=\tan\theta$$

$$\frac{ev_2}{v_1}=\tan\theta$$

$v_1=v\sin\theta$，$v_2=v\cos\theta$　より

$$\frac{ev\cos\theta}{v\sin\theta}=\tan\theta$$

よって　$e=\tan^2\theta$

となる。

以上より，最も適当なものは ②。

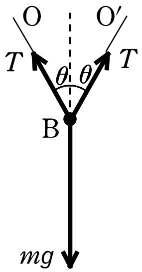
3 [1993 センター]

解答　(1)　⑧　　(2)　⑤　　(3)　④　　(4)　⑥　　(5)　④　　(6)　①　　(7)　②

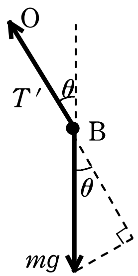
(1)　図 (a) の力のつりあいから両者は等しく

$$2T\cos\theta=mg \qquad ゆえに\quad T=\frac{mg}{2\cos\theta}$$

(a)



(b)



(2)　図 (b) で OB 方向では力はつりあっているから

$$T'=mg\cos\theta$$

(3)　B の，床面からの高さは $h(1-\cos\theta)$

エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh(1-\cos\theta)$$

ゆえに　$v=\sqrt{2gh(1-\cos\theta)}$

(4)　衝突直後の A，B の速さを v_{A}，v_{B} とし，運動量保存則とはねかえり係数の式をたてる。

$$mv=Mv_{\mathrm{A}}+mv_{\mathrm{B}},\quad -\frac{v_{\mathrm{A}}-v_{\mathrm{B}}}{0-v}=1 \qquad ゆえに\quad v_{\mathrm{A}}=\frac{2mv}{m+M}$$

(5)　ばねの長さは $\sqrt{h^2+x^2}$ だからばねの弾性力 f は

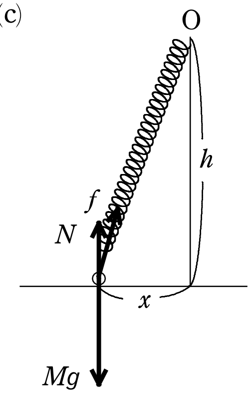
$$f=k(\sqrt{h^2+x^2}-h)$$

Q 点での鉛直方向成分のつりあいから

$$N=Mg-f\times\frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

$$=Mg-kh\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}\right)$$

(c)



(6)　点 P での A の運動エネルギーが，点 Q でばねの弾性エネルギーに変わった。

$$\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}k(\mathrm{OQ}-h)^2$$

ゆえに　$\mathrm{OQ}-h=V\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

(7)　衝突の際，運動量は保存される。衝突後の速さを V' とすると

$$mv=(m+M)V' \qquad ゆえに\quad V'=\frac{mv}{m+M}$$

最高点の床からの高さを y とする (ひも OB によってばねは伸び縮みしない)。

エネルギー保存則から　$\dfrac{1}{2}(m+M)V'^2=(m+M)gy$　　ゆえに　$y=\dfrac{m^2v^2}{2g(m+M)^2}$

4

解答　〔A〕 (1)　$\sqrt{2gh}$〔m/s〕　　(2)　e^2h〔m〕

〔B〕 (1)　小球と台の系は，水平方向の外力を受けないので，小球と台の全運動量の水平成分は保存する。その値は，点 A で手をはなした瞬間を考えれば 0 である。運動量保存則は

$$0=mv+M(-V)$$

よって　$V=\dfrac{m}{M}v$

この式は，小球と台が静止している場合 ($v=V=0$) も含めて常に成りたつ。

(2)　$v_2=\sqrt{\dfrac{2M}{M+m}gh}$〔m/s〕，$V_2=\dfrac{m}{M}\sqrt{\dfrac{2M}{M+m}gh}$〔m/s〕

(3)　$l\sqrt{\dfrac{M}{2(M+m)gh}}$〔s〕

(4)　$v_2{}'=e\sqrt{\dfrac{2M}{M+m}gh}$〔m/s〕，$V_2{}'=\dfrac{em}{M}\sqrt{\dfrac{2M}{M+m}gh}$〔m/s〕

(5)　e^2h〔m〕

ヒント　〔B〕(1)　「$V=\dfrac{m}{M}v$ の関係が常に成りたつ」$\Longrightarrow$ 小球と台の水平方向の運動量は保存している

(3)　台から見た小球の運動を考えればよい。

〔A〕 (1)　力学的エネルギー保存則より

$$mgh=\frac{1}{2}mv_1{}^2 \qquad \text{よって}\quad v_1=\sqrt{2gh}\,\text{〔m/s〕}$$

(2)　衝突後の小球の速さを $v_1{}'$ とすると，反発係数 e での壁との衝突なので

$$v_1{}'=ev_1$$

衝突後，最高点に達するまで力学的エネルギーは保存するので

$$\frac{1}{2}mv_1{}'^2=mgh_1$$

よって　$h_1=\dfrac{v_1{}'^2}{2g}=\dfrac{1}{2g}(ev_1)^2=\dfrac{e^2}{2g}\times 2gh=e^2h$〔m〕

〔B〕 (1)　小球と台の系は，水平方向の外力を受けないので，小球と台の全運動量の水平成分は保存する。その値は，点 A で手をはなした瞬間を考えれば 0 である。右向きを正の向きとすると，図 a より運動量保存則は

$0=mv+M(-V)$※A← (台が左向きに動いている場合)

$0=m(-v)+MV$ (台が右向きに動いている場合)

よって

$$V=\frac{m}{M}v \quad \cdots\cdots ①$$

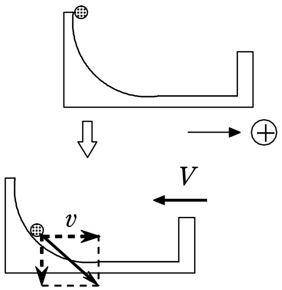


図 a

この①式は，小球と台が静止している場合 ($v=V=0$) も含めて常に成りたつ。

(2)　小球と台の間には摩擦力がはたらかず，外力による仕事も 0 なので，力学的エネルギー保存則より

$$mgh=\frac{1}{2}mv_2{}^2+\frac{1}{2}MV_2{}^2 \quad \cdots\cdots ②$$

(1) より，速度の水平成分の大きさについて　$V_2=\dfrac{m}{M}v_2$ なので，② 式に代入して

$$mgh=\frac{1}{2}mv_2{}^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v_2\right)^2$$

よって　$2gh=\left(1+\dfrac{m}{M}\right)v_2{}^2$

ゆえに

$$v_2=\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh}\,\text{〔m/s〕}^{※B←} \quad \cdots\cdots ③$$

$$V_2=\frac{m}{M}v_2=\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh}\,\text{〔m/s〕} \quad \cdots\cdots ④$$

(3)　台に対する小球の相対速度 $v_{台\to小球}$〔m/s〕は図 b より，① 式と ③ 式を使うと

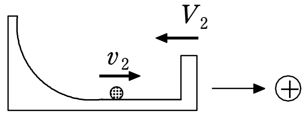


図 b

$$\begin{aligned} v_{台\to小球}&=v_2-(-V_2)=v_2+V_2\\ &=v_2+\frac{m}{M}v_2\\ &=\frac{M+m}{M}v_2=\sqrt{\frac{2(M+m)}{M}gh} \end{aligned}$$

小球が最初に点 B から壁まで動く時間を t〔s〕とすると，

「$x=vt$」より

$$l=v_{台\to小球}t$$

よって　$t=\dfrac{l}{v_{台\to小球}}=l\sqrt{\dfrac{M}{2(M+m)gh}}$〔s〕

(4)　衝突直後の小球と台の速度をそれぞれ v_3〔m/s〕，V_3〔m/s〕とする※C←。

反発係数の式は

$$e=-\frac{v_3-V_3}{v_2-(-V_2)} \quad \cdots\cdots ⑤$$

運動量は，点 A で手をはなした瞬間から壁との衝突前後で常に保存されるから

$$0=mv_2+M(-V_2)=mv_3+MV_3$$

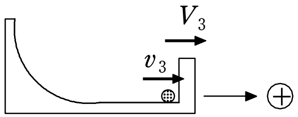


図 c

よって

$$V_2=\frac{m}{M}v_2,\ V_3=-\frac{m}{M}v_3 \quad \cdots\cdots ⑥$$

これらを ⑤ 式に代入すると

$$e=-\frac{v_3\left(1+\frac{m}{M}\right)}{v_2\left(1+\frac{m}{M}\right)}=-\frac{v_3}{v_2} \qquad \text{ゆえに}\quad v_3=-ev_2 \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑥ 式と ⑦ 式を使うと

$$V_3=-\frac{m}{M}v_3=-\frac{m}{M}(-ev_2)=e\frac{m}{M}v_2=eV_2 \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑦，⑧ 式にそれぞれ ③，④ 式を代入して

$$v_2'=|v_3|=ev_2=e\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh}\ 〔\mathrm{m/s}〕$$

$$V_2'=|V_3|=eV_2=\frac{em}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh}\ 〔\mathrm{m/s}〕$$

(5)　最高点では台に対して小球は静止するので，小球と台は同じ速度になる。運動量保存則より，その速さは 0 になる。したがって，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_2'^2+\frac{1}{2}MV_2'^2=mgh_2$$

(4) の結果より，$v_2'=ev_2$，$V_2'=eV_2$ となることと ② 式を用いると

$$mgh_2=\frac{1}{2}m(ev_2)^2+\frac{1}{2}M(eV_2)^2$$

$$=e^2\left(\frac{1}{2}mv_2{}^2+\frac{1}{2}MV_2{}^2\right)=e^2mgh$$

よって　$h_2=e^2h$〔m〕

←※A　小球が斜面をすべっているときに，台が小球から受ける力の水平成分は左向きになるので，台は左向きに動く。よって，最初の壁の衝突までは台の速度の水平成分は $-V$ となる。

←※B　別解　静止物体の分裂と考えれば，運動エネルギーは質量の逆比に分配されるので

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2=mgh\times\frac{M}{M+m}$$

よって

$$v_2=\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh}\ 〔\mathrm{m/s}〕$$

←※C　v_3，V_3 は速度であり速さではないので，符号を含むものとする。