$\boxed{1}$

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。いくつかの直線や曲線で囲まれた図形の内部にある格子点の個数を考えよう。ただし，図形の内部は，境界（境界線）を含まないものとする。

例えば，直線 $y=-x+5$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を S とする。S は図 1 の灰色部分であり，S の内部にある格子点を黒丸，内部にない格子点を白丸で表している。したがって，S の内部にある格子点の個数は 6 である。

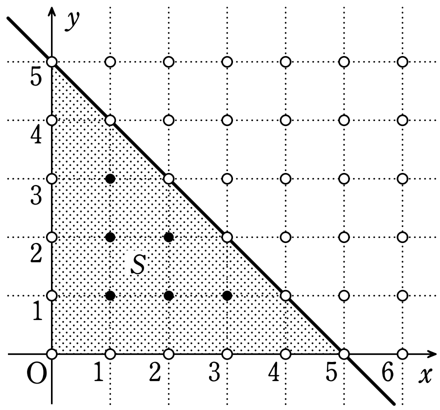


図　1

(1)　直線 $y=3x$ と x 軸，直線 $x=21$ で囲まれた図形を T とする。T の内部にある格子点の個数を考える。

直線 $x=1$ 上の格子点で T の内部にあるものは，点 $(1,\ 1)$ と点 $(1,\ 2)$ の 2 個である。点 $(1,\ 0)$ と点 $(1,\ 3)$ は T の境界にあるため，内部にはない。

n を整数とする。直線 $x=n$ が T の内部にある格子点を通るのは，$1 \leqq n \leqq 20$ のときである。$1 \leqq n \leqq 20$ のとき，直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものの個数を a_n とおく。$a_1=2$ であり，$a_2=\boxed{\text{ア}}$，$a_3=\boxed{\text{イ}}$ である。

数列 $\{a_n\}$ は $\boxed{\boxed{\text{ウ}}}$ が $\boxed{\text{エ}}$ の $\boxed{\boxed{\text{オ}}}$ 数列である。

したがって，T の内部にある格子点の個数は $\boxed{\text{カキク}}$ である。

$\boxed{\boxed{\text{ウ}}}$ の解答群

⓪　公　差	①　公　比

$\boxed{\boxed{\text{オ}}}$ の解答群

⓪ 等　差	① 等　比

(2)　n を自然数とする。関数 $y=2^x$ のグラフと x 軸，y 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形を U とする。

k を整数とする。直線 $x=k$ が U の内部にある格子点を通るとき，直線 $x=k$ 上の格子点で U の内部にあるものの個数は $\boxed{ケ}$ である。

したがって，U の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{\boxed{コ}}\left(\boxed{ケ}\right)=\boxed{サ}$$

である。

$\boxed{ケ}$ の解答群

⓪ $2k-2$	① $2k-1$	② $2k$
③ $2^{k-1}-2$	④ $2^{k-1}-1$	⑤ 2^{k-1}
⑥ 2^k-2	⑦ 2^k-1	⑧ 2^k

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪ $n-1$	① n	② $n+1$
③ $2n-1$	④ $2n$	⑤ $2n+1$
⑥ 2^n-1	⑦ 2^n	⑧ 2^n+1

$\boxed{サ}$ の解答群

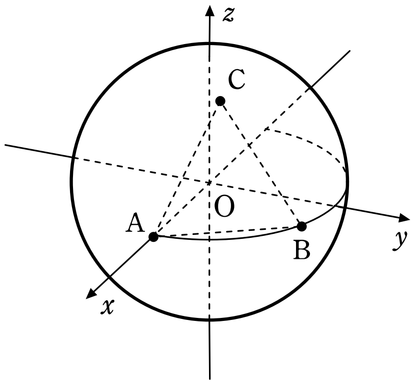
⓪ 2^n-2n-1	① 2^n-2n	② 2^n-n-1
③ 2^n-n	④ 2^n-3	⑤ $2^{n+1}-2n-2$
⑥ $2^{n+1}-2n-1$	⑦ $2^{n+1}-n-2$	⑧ $2^{n+1}-n-1$
⑨ $2^{n+1}-3$		

(3)　a，b，c は整数で，$a>0$，$b^2-4ac<0$ を満たすとする。放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸，y 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形を V とする。すべての自然数 n に対して，V の内部にある格子点の個数が n^3 となるのは，

$a=\boxed{シ}$，$b=\boxed{スセ}$，$c=\boxed{ソ}$ のときである。

$\boxed{2}$

O を原点とする座標空間において，O を中心とする半径 1 の球面を S とする。S 上に 2 つの点 A $(1,\ 0,\ 0)$，B $\left(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0\right)$ をとる。ただし，a は $-1<a<1$ を満たす実数とする。S 上の点 C を，△ABC が正三角形となるようにとれるかどうかを考えてみよう。



参考図

(1)　点 C の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする。C が S 上にあるとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = \boxed{\text{ア}}$$

である。これをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の成分を用いて表すと

$$x^2+y^2+z^2=\boxed{\text{ア}} \quad \cdots\cdots ①$$

となる。

さらに，△ABC が正三角形であるとする。△OAC と △OAB は，対応する 3 組の辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。したがって，対応する角の大きさも等しいから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ。これをベクトルの成分を用いて表すと

$$x=\boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots ②$$

となる。同様に △OBC と △OAB も合同であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{イ}}$$

が成り立ち，これをベクトルの成分を用いて表すと

$$\boxed{\text{エ}}\,x+\boxed{\text{オ}}\,y=\boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots ③$$

となる。

逆に，実数 x，y，z が ①，②，③ を満たすとき，C $(x,\ y,\ z)$ は S 上の点であり，△ABC は正三角形になっていることがわかる。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert$
③ $\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert^2$	④ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$	⑤ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ a	① $(1+a)$	② $(1-a)$
③ a^2	④ $(1-a^2)$	⑤ $\sqrt{1-a^2}$

(2) a に具体的な値を代入して，△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるかどうかを調べよう。

(i) $a=\dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 x，y は

$$x=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\qquad y=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である。この x，y に対して，① を満たす実数 z は $\boxed{\text{サ}}$。したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{\text{サ}}$。

(ii) $a=-\dfrac{3}{5}$ のときも調べよう。(i) と同様に考えると，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{\text{シ}}$ ことがわかる。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ ない	① ちょうど 1 つある	② ちょうど 2 つある
③ ちょうど 3 つある	④ ちょうど 4 つある	⑤ 無限に多くある

(3) △ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための，a に関する条件を見つけよう。
実数 x，y，z は，①，②，③ を満たすとする。② と ③ から

$$x=\boxed{\text{ウ}},\qquad y=\frac{\boxed{\text{ウ}}\left(1-\boxed{\text{エ}}\right)}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。このとき，① から

$$z^2=\boxed{\text{ア}}-x^2-y^2=\frac{\boxed{\text{ス}}}{1+a}$$

となる。さらに，$z^2\geqq 0$，$1+a>0$ であるから $\boxed{\text{ス}}\geqq 0$ である。

逆に，$\boxed{\text{ス}}\geqq 0$ のとき，①，②，③ を満たす実数 x，y，z があることがわかる。

以上のことから，$\boxed{\text{セ}}$ は，△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための必要

十分条件である。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $1-2a$	① $(1-a)^2$
② $(1+2a)^2$	③ $(1+2a)(1-a)$
④ $(1-2a)(1-a)$	⑤ $(1-2a^2)(1+2a)$
⑥ $(1+2a^2)(1-a)$	⑦ $(1-2a^2)(1-a)$

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ $-1<a<1$	① $-1<a\leqq\frac{1}{2}$	② $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq a\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$
③ $-\frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$	④ $-\frac{1}{2}\leqq a<1$	⑤ $\frac{1}{2}\leqq a<1$
⑥ $-1<a\leqq-\frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2}\leqq a<1$		
⑦ $-1<a\leqq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ または $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq a<1$		

$\boxed{3}$

n を 2 以上の自然数とし，1 個のさいころを n 回投げて出る目の数を順に
X_1，X_2，……，X_n とする。X_1，X_2，……，X_n の最小公倍数を L_n，最大公約数を G_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$L_2=5$ となる確率および $G_2=5$ となる確率を求めよ。

(2)　L_n が素数でない確率を求めよ。

(3)　G_n が素数でない確率を求めよ。

$\boxed{4}$

n を自然数とする。3 つの整数 n^2+2，n^4+2，n^6+2 の最大公約数 A_n を求めよ。

$\boxed{5}$

正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える。t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ。