$\boxed{1}$

連立方程式 $\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots\cdots ① \\ \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を考える。

ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であり，$\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \quad \cdots\cdots ③$$

とする。このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう。

2 倍角の公式を用いると，① から $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ が得られる。

また，② から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{オ}}{15}$ である。

したがって，条件 ③ を用いると $\cos^2\alpha = \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$，$\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。よって，

② と条件 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$ から

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}, \quad \cos\beta = \frac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$$

である。

$\boxed{2}$

座標平面上に点 $A\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ をとり，関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上に 2 点 $B(p, \log_2 p)$，$C(q, \log_2 q)$ をとる。線分 AB を 1 : 2 に内分する点が C であるとき，p，q の値を求めよう。

真数の条件により，$p > \boxed{ア}$，$q > \boxed{ア}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

線分 AB を 1 : 2 に内分する点の座標は，p を用いて

$\left(\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}p, \ \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\log_2 p + \boxed{カ}\right)$ と表される。これが C の座標と一致するので

$\begin{cases} \dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}p = q & \cdots\cdots ④ \\ \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\log_2 p + \boxed{カ} = \log_2 q & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$ が成り立つ。

⑤ は $p = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}q^{\boxed{ケ}}$ ……⑥ と変形できる。④ と ⑥ を連立させた方程式を解いて，

$p > \boxed{ア}$，$q > \boxed{ア}$ に注意すると $p = \boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$，$q = \boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}$ である。

また，C の y 座標 $\log_2\left(\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}\right)$ の値を，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると，$\boxed{セ}$ である。$\boxed{セ}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⓑ のうちから 1 つ選べ。

ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$，$\log_{10}7 = 0.8451$ とする。

⓪ 0.3　① 0.6　② 0.9　③ 1.3　④ 1.6　⑤ 1.9
⑥ 2.3　⑦ 2.6　⑧ 2.9　⑨ 3.3　ⓐ 3.6　ⓑ 3.9

$\boxed{3}$

O を原点とする座標平面上の放物線 $y=x^2+1$ を C とし，点 $(a,\ 2a)$ を P とする。

(1)　点 P を通り，放物線 C に接する直線の方程式を求めよう。

C 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は $y=\boxed{ア}tx-t^2+\boxed{イ}$ である。

この直線が P を通るとすると，t は方程式 $t^2-\boxed{ウ}at+\boxed{エ}a-\boxed{オ}=0$ を満たすから，$t=\boxed{カ}a-\boxed{キ}$，$\boxed{ク}$ である。

よって，$a\fallingdotseq\boxed{ケ}$ のとき，P を通る C の接線は 2 本あり，それらの方程式は

$y=(\boxed{コ}a-\boxed{サ})x-\boxed{シ}a^2+\boxed{ス}a$　……① と $y=\boxed{セ}x$ である。

(2)　(1) の方程式 ① で表される直線を ℓ とする。ℓ と y 軸との交点を R$(0,\ r)$ とすると，$r=-\boxed{シ}a^2+\boxed{ス}a$ である。$r>0$ となるのは，$\boxed{ソ}<a<\boxed{タ}$ のときであり，このとき，三角形 OPR の面積 S は $S=\boxed{チ}\left(a^{\boxed{ツ}}-a^{\boxed{テ}}\right)$ となる。

$\boxed{ソ}<a<\boxed{タ}$ のとき，S の増減を調べると，S は $a=\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌネ}}$ をとることがわかる。

(3)　$\boxed{ソ}<a<\boxed{タ}$ のとき，放物線 C と (2) の直線 ℓ および 2 直線 $x=0$，$x=a$ で囲まれた図形の面積を T とすると $T=\dfrac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}a^3-\boxed{ヒ}a^2+\boxed{フ}$ である。

$\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}\leqq a<\boxed{タ}$ の範囲において，T は $\boxed{ヘ}$。$\boxed{ヘ}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから 1 つ選べ。

⓪　減少する　　①　極小値をとるが，極大値はとらない

②　増加する　　③　極大値をとるが，極小値はとらない

④　一定である　　⑤　極小値と極大値の両方をとる

$\boxed{4}$

以下において考察する数列の項は，すべて実数であるとする。

(1)　等比数列 $\{s_n\}$ の初項が 1，公比が 2 であるとき

$$s_1s_2s_3=\boxed{\text{ア}},\ s_1+s_2+s_3=\boxed{\text{イ}}$$

である。

(2)　$\{s_n\}$ を初項 x，公比 r の等比数列とする。a，b を実数(ただし $a\fallingdotseq 0$) とし，$\{s_n\}$ の最初の 3 項が

$$s_1s_2s_3=a^3 \quad \cdots\cdots ①\qquad s_1+s_2+s_3=b \quad \cdots\cdots ②$$

を満たすとする。このとき $xr=\boxed{\text{ウ}}$　……③ である。

さらに，②，③ を用いて r，a，b の満たす関係式を求めると

$\boxed{\text{エ}}r^2+(\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}})r+\boxed{\text{キ}}=0$　……④ を得る。④ を満たす実数 r が存在するので $\boxed{\text{ク}}a^2+\boxed{\text{ケ}}ab-b^2\leqq 0$　……⑤ である。

逆に，a，b が ⑤ を満たすとき，③，④ を用いて r，x の値を求めることができる。

(3)　$a=64$，$b=336$ のとき，(2) の条件 ①，② を満たし，公比が 1 より大きい等比数列 $\{s_n\}$ を考える。

③，④ を用いて $\{s_n\}$ の公比 r と初項 x を求めると，$r=\boxed{\text{コ}}$，$x=\boxed{\text{サシ}}$ である。

$\{s_n\}$ を用いて，数列 $\{t_n\}$ を $t_n=s_n\log_{\boxed{\text{コ}}}s_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と定める。

このとき，$\{t_n\}$ の一般項は $t_n=\left(n+\boxed{\text{ス}}\right)\cdot\boxed{\text{コ}}^{\,n+\boxed{\text{セ}}}$ である。$\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n は，$U_n-\boxed{\text{コ}}U_n$ を計算することにより

$$U_n=\frac{\boxed{\text{ソ}}n+\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\cdot\boxed{\text{コ}}^{\,n+\boxed{\text{ツ}}}-\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

であることがわかる。

5

座標平面上に点 A$(2,\ 0)$ をとり，原点 O を中心とする半径が 2 の円周上に点 B，C，D，E，F を，点 A，B，C，D，E，F が順に正六角形の頂点となるようにとる。ただし，B は第 1 象限にあるとする。

(1) 点 B の座標は $\left(\boxed{ア},\ \sqrt{\boxed{イ}}\right)$，点 D の座標は $\left(-\boxed{ウ},\ 0\right)$ である。

(2) 線分 BD の中点を M とし，直線 AM と直線 CD の交点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を求めよう。

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は実数 r，s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と 2 通りに表すことができる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(-\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\left(\boxed{ク},\ \sqrt{\boxed{ケ}}\right)$ であるから $r=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$，$s=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

よって $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(-\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}},\ \dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}\right)$ である。

(3) 線分 BF 上に点 P をとり，その y 座標を a とする。点 P から直線 CE に引いた垂線と，点 C から直線 EP に引いた垂線との交点を H とする。

$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\left(\boxed{テ},\ \boxed{ト}+\sqrt{\boxed{ナ}}\right)$ と表せることにより，H の座標を a を用いて表すと $\left(\dfrac{\boxed{ニ}a^{\boxed{ヌ}}+\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}},\ \boxed{ハ}\right)$ である。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とする。$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき，a の値は

$a=\pm\dfrac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フヘ}}$ である。

$\boxed{6}$

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

(1)　1 回の試行において，事象 A の起こる確率が p，起こらない確率が $1-p$ であるとする。この試行を n 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を W とする。確率変数 W の平均 (期待値) m が $\dfrac{1216}{27}$，標準偏差 σ が $\dfrac{152}{27}$ であるとき，$n=\boxed{\text{アイウ}}$，$p=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(2)　(1) の反復試行において，W が 38 以上となる確率の近似値を求めよう。

いま　$P(W \geqq 38)=P\left(\dfrac{W-m}{\sigma} \geqq -\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right)$ と変形できる。ここで，$Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$ とおき，W の分布を正規分布で近似すると，正規分布表から確率の近似値は次のように求められる。

$$P\left(Z \geqq -\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right)=0.\boxed{\text{コサ}}$$

(3)　連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $s \leqq x \leqq t$ で，確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均 $E(X)$ は次の式で与えられる。

$$E(X)=\int_s^t xf(x)\,dx$$

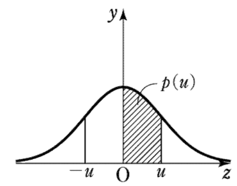
a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $-a \leqq x \leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leqq x \leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0 \leqq x \leqq 2a \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるとする。このとき，$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，X の平均は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。さらに，$Y=2X+7$ とおくと，Y の平均は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}+\boxed{\text{テ}}$ である。

正規分布表



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900