

1

k, l, m を実数とし, x の整式 $P(x) = x^4 + kx^2 + lx + m$ を考える。

- (1) $P(x)$ は $x+1$ で割り切れるとする。このとき, 因数定理により, $P(\text{アイ}) = 0$ が成り立つから, m は k, l を用いて

$$m = \text{ウ} k + l - \text{エ} \dots\dots \text{①}$$

と表される。また, $P(x)$ を $x+1$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$Q(x) = x^3 - x^2 + (k + \text{オ})x - k + l - \text{カ}$$

である。

- (2) $P(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れるとする。このとき, (1) で求めた $Q(x)$ は $x+1$ で割り切れる。このことと ① により, l, m は k を用いて

$$l = \text{キ} k + \text{ク}, \quad m = k + \text{ケ}$$

と表される。また, $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの商を $R(x)$ とすると

$$R(x) = x^2 - \text{コ} x + k + \text{サ}$$

である。

以下の (3), (4) では, $P(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れるとする。

- (3) $R(x)$ を (2) で求めた 2 次式とし, 2 次方程式 $R(x) = 0$ の判別式を D とする。このとき, $P(x)$ がつねに 0 以上の値をとることは, D の値が シ であることと同値であり, これは, $k + \text{ス}$ の値が セ であることと同値である。

シ , セ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

① 負	② 0 以下	③ 0
④ 正	⑤ 0 以上	

- (4) t を実数とする。4 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解 $t+3i, t-3i$ をもつとき, $t = \text{ソ}$, $k = \text{タ}$ である。

2

実数 s, t が

$$s \geq 1, t \geq 1, s^3 t^5 \leq 2^{10}, s^4 t \leq 2^8 \dots\dots ①$$

を満たすとき、 $z = \log_8(s^8 t^6)$ のとり得る値の範囲にある最大の整数 n を求めよう。

$x = \log_2 s, y = \log_2 t$ とおく。 s, t が ① を満たすための必要十分条件は、座標平面上で点 (x, y) が

$$(0, 0), (\text{ア}, 0), \left(\frac{\text{イウ}}{\text{エオ}}, \frac{\text{カキ}}{\text{クケ}} \right), (0, \text{コ})$$

を頂点とする四角形の周および内部からなる領域にあることである。

$z = \log_8(s^8 t^6)$ を x, y を用いて表すと

$$z = \frac{\text{サ}}{\text{シ}} x + \text{ス} y$$

である。

したがって、求める最大の整数 n は セ である。

3

a を実数とし、 $f(x) = (x-a)(x-2)$ とおく。また、 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ とする。

(1) $a=1$ のとき、 $F(x)$ は $x = \boxed{\text{ア}}$ で極小になる。

(2) $a = \boxed{\text{イ}}$ のとき、 $F(x)$ はつねに増加する。また、 $F(0) = \boxed{\text{ウ}}$ であるから、
 $a = \boxed{\text{イ}}$ のとき、 $F(2)$ の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

$\textcircled{0}$ 0 $\textcircled{1}$ 正 $\textcircled{2}$ 負

(3) $a > \boxed{\text{イ}}$ とする。

b を実数とし、 $G(x) = \int_b^x f(t) dt$ とおく。

関数 $y=G(x)$ のグラフは、 $y=F(x)$ のグラフを $\boxed{\text{オ}}$ 方向に $\boxed{\text{カ}}$ だけ平行移動したものと一致する。また、 $G(x)$ は $x = \boxed{\text{キ}}$ で極大になり、 $x = \boxed{\text{ク}}$ で極小になる。

$G(b) = \boxed{\text{ケ}}$ であるから、 $b = \boxed{\text{キ}}$ のとき、曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点の個数は $\boxed{\text{コ}}$ 個である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

$\textcircled{0}$ x 軸 $\textcircled{1}$ y 軸

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

$\textcircled{0}$ b $\textcircled{1}$ $-b$ $\textcircled{2}$ $F(b)$
 $\textcircled{3}$ $-F(b)$ $\textcircled{4}$ $F(-b)$ $\textcircled{5}$ $-F(-b)$

4

$g(x) = |x|(x + 1)$ とおく。

点 $P(-1, 0)$ を通り、傾きが c の直線を l とする。 $g'(-1) = \boxed{\text{ア}}$ であるから、

$0 < c < \boxed{\text{ア}}$ のとき、曲線 $y = g(x)$ と直線 l は 3 点で交わる。そのうちの 1 点は P であり、残りの 2 点を点 P に近い方から順に Q, R とすると、点 Q の x 座標は $\boxed{\text{イウ}}$ であり、点 R の x 座標は $\boxed{\text{エ}}$ である。

また、 $0 < c < \boxed{\text{ア}}$ のとき、線分 PQ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とし、線分 QR と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$S = \frac{\boxed{\text{オ}}c^3 + \boxed{\text{カ}}c^2 - \boxed{\text{キ}}c + 1}{\boxed{\text{ク}}}$$

$$T = c^{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

5

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

全国規模の検定試験が毎年度行われており、この試験の満点は200点で、点数が100点以上の人が合格となる。今年度行われた第1回目の試験と第2回目の試験について考える。

(1) 第1回目の試験については、受験者全体での平均点が95点、標準偏差が20点であることだけが公表されている。受験者全体での点数の分布を正規分布とみなして、この試験

の合格率を求めよう。試験の点数を表す確率変数を X としたとき、 $Z = \frac{X - \text{アイ}}{\text{ウエ}}$

が標準正規分布に従うことを利用すると $P(X \geq 100) = P(Z \geq \text{オ}, \text{カキ})$ により、合格率は クケ % である。

また、点数が受験者全体の上位10%の中に入る受験者の最低点はおおよそ コ である。 コ に当てはまる最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- ① 116点 ④ 121点 ⑦ 126点
② 129点 ⑤ 134点 ⑧ 142点

(2) 第1回目の試験の受験者全体から無作為に19名を選んだとき、その中で点数が受験者全体の上位10%に入る人数を表す確率変数を Y とする。

Y の分布を二項分布とみなすと、 Y の期待値は $\text{サ}, \text{シ}$ 、分散は $\text{ス}, \text{セソ}$ である。

また、 $Y=1$ となる確率を p_1 、 $Y=2$ となる確率を p_2 とする。このとき、 $\frac{p_1}{p_2} = \text{タ}$ である。 タ に当てはまるものを、次の①～④のうちから一つ選べ。

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 9

(3) 第2回目の試験の受験者全体の平均点と標準偏差はまだ公表されていない。第2回目の試験の受験者全体を母集団としたときの母平均 m を推定するため、この受験者から無作為に抽出された96名の点数を調べたところ、標本平均の値は99点であった。

母標準偏差の値を第1回目の試験と同じ20点であるとすると、標本平均の分布が正規分布で近似できることを用いて、 m に対する信頼度95%の信頼区間は

$\text{チツ} \leq m \leq \text{テトナ}$ となり、この信頼区間の幅は ニ である。ただし、 $\sqrt{6} = 2.45$ とする。

また、母標準偏差の値が15点であるとすると、 m に対する信頼度95%の信頼区間の幅は ヌ となる。

6

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = -5, \quad na_{n+1} = (n+2)a_n + 4(n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

$$b_n = \frac{a_n}{n(n+1)} \text{ とおくと, } b_1 = \frac{\text{アイ}}{\text{ウ}} \text{ である。さらに, } b_n \text{ と } b_{n+1} \text{ は関係式}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{\text{エ}}{n(n+\text{オ})} \text{ を満たす。}$$

$$\text{ここで, すべての自然数 } k \text{ に対して } \frac{\text{エ}}{k(k+\text{オ})} = \text{カ} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\text{オ}} \right) \text{ が成り}$$

$$\text{立つから, 2 以上の自然数 } n \text{ に対して } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\text{エ}}{k(k+\text{オ})} = \frac{\text{キ}n^2 - n - \text{ク}}{n(n+\text{ケ})} \text{ で}$$

ある。これを用いて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより

$$a_n = \frac{n^2 - \text{コ}n - \text{サ}}{\text{シ}} \text{ であることがわかる。}$$

(2) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n(\text{シ}a_n - 24)$ で与えられると

き, $\{c_n\}$ の一般項と, c_1 から c_{10} までの各項の絶対値の和 $\sum_{n=1}^{10} |c_n|$ を求めよう。

$c_1 = \text{スセソ}$ である。また, $n \geq 2$ のとき

$c_n = (n + \text{タ})(\text{チ}n - \text{ツテ}) \dots \text{①}$ である。① は $n=1$ のときにも成り立つから, $\{c_n\}$ の一般項は ① である。

① から, $1 \leq n \leq \text{ト}$ のとき $c_n < 0$ であり, $n > \text{ト}$ のとき $c_n > 0$ である。よつ

て $\sum_{n=1}^{10} |c_n| = \text{ナニ}S_{\text{ト}} + S_{10} = \text{ヌネノ}$ である。

7

正八角形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ を考える。 $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{P_0P_7} = \vec{b}$ とおく。

(1) 正八角形の一つの内角は $\square{\text{アイウ}}^\circ$ である。また、 $\angle P_1P_0P_{\square{\text{エ}}} = 90^\circ$ である。

以下の、(2) の $\square{\text{オ}} \sim \square{\text{ケ}}$ 、および(3) の $\square{\text{コ}}$ 、 $\square{\text{サ}}$ については、当てはまるものを、次の ① ~ ⑨ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

- ① $\vec{a} + \vec{b}$ ② $\vec{a} + (1 + \sqrt{2})\vec{b}$ ③ $(2 + \sqrt{2})\vec{a} + (1 + \sqrt{2})\vec{b}$
 ④ $\sqrt{2}\vec{a} + \vec{b}$ ⑤ $(1 + \sqrt{2})\vec{a} + \vec{b}$ ⑥ $(1 + \sqrt{2})\vec{a} + (2 + \sqrt{2})\vec{b}$
 ⑦ $\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}$ ⑧ $(1 + \sqrt{2})(\vec{a} + \vec{b})$ ⑨ $(2 + \sqrt{2})(\vec{a} + \vec{b})$
 ⑩ $\sqrt{2}(\vec{a} + \vec{b})$

(2) $k = 1, 2, \dots, 7$ に対して、ベクトル $\overrightarrow{P_0P_k}$ を \vec{a} , \vec{b} を用いて表すと

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{a}, \overrightarrow{P_0P_2} = \square{\text{オ}}, \overrightarrow{P_0P_3} = \square{\text{カ}}, \overrightarrow{P_0P_4} = \square{\text{キ}}$$

$$\overrightarrow{P_0P_5} = \square{\text{ク}}, \overrightarrow{P_0P_6} = \square{\text{ケ}}, \overrightarrow{P_0P_7} = \vec{b}$$

である。

(3) $k = 0, 1, \dots, 7$ に対して、対角線 P_kP_{k+3} と対角線 $P_{k+1}P_{k+4}$ の交点を Q_k とする。

ただし、 P_8, P_9, P_{10}, P_{11} は、それぞれ P_0, P_1, P_2, P_3 を表すものとする。

このとき、 $\overrightarrow{P_0Q_6} = \square{\text{コ}}$, $\overrightarrow{P_0Q_7} = \square{\text{サ}}$ である。

(4) $\overrightarrow{Q_6Q_7} = (\sqrt{\square{\text{シ}}} - \square{\text{ス}})\vec{a}$ である。

したがって、正八角形 $Q_0Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6Q_7$ の面積は、正八角形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$

の面積の $(\square{\text{セ}} - \square{\text{ソ}}\sqrt{\square{\text{タ}}})$ 倍である。