第８章

～　数列　～

第１講　等差数列・等比数列

１　数列と一般項

$\boxed{1}$ **数列と一般項**

数を一列に並べたものを **数列** という。数列 a_1, a_2, a_3, ……, a_n, …… を $\{a_n\}$ と表す。数列における各数を **項** といい，最初の項を **初項**，n 番目の項を **第 n 項** という。数列 $\{a_n\}$ の第 n 項が n の式で表されるとき，これを数列 $\{a_n\}$ の **一般項** という。

２　等差数列

$\boxed{1}$ **等差数列**

初項に一定の数 d を次々と足して得られる数列を **等差数列** といい，その一定の数 d を **公差** という。

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \quad \cdots\cdots$$

$$a_{n+1}-a_n=d$$

$\boxed{2}$ **等差数列の一般項**

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a+(n-1)d$$

$\boxed{3}$ **等差数列をなす３数**

数列 a，b，c が等差数列 $\Longleftrightarrow$ $2b=a+c$　(b を **等差中項** という)

３　等差数列の和

$\boxed{1}$ **等差数列の和**

等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

１　初項 a，第 n 項 l のとき　　$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)$

２　初項 a，公差 d のとき　　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

$\boxed{注}$　１は初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n を表している。

$\boxed{2}$ **自然数の和，奇数の和**

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),\quad 1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$$

４　**等比数列**

1　**等比数列**

初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列を

等比数列 といい，その一定の数 r を **公比** という。

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \quad \cdots\cdots$$

$$a_{n+1}=ra_n$$

2　**等比数列の一般項**

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=ar^{n-1}$$

3　**等比数列をなす３数**

a，b，c が０でないとする。

数列 a，b，c が等比数列 $\Longleftrightarrow$ $b^2=ac$　(b を **等比中項** という)

５　**等比数列の和**

1　**等比数列の和**

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r\neq 1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$ のとき　$S_n=na$

参考　$r\neq 1$ のとき　$\dfrac{1-r^n}{1-r}=1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}$

第１講　例題

1 ★☆☆

(1)　等差数列 100，97，94，…… の一般項 a_n を求めよ。また，第 35 項を求めよ。

(2)　第 59 項が 70，第 66 項が 84 の等差数列 $\{a_n\}$ において

(ア)　一般項を求めよ。　　　　　　　　(イ)　118 は第何項か。

(ウ)　初めて正になるのは第何項か。

2 ★☆☆

(1)　次の等差数列の和を求めよ。

85，78，71，……，43

(2)　初項 -2，公差 4 の等差数列の，初項から第 32 項までの和を求めよ。

3 ★★☆

初項 70，公差 -4 の等差数列 $\{a_n\}$ について

(1)　初項から第何項までの和が初めて負となるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

4 ★☆☆

(1)　等比数列 2，-6，18，…… の一般項 a_n を求めよ。また，第 8 項を求めよ。

(2)　第 2 項が 48，第 5 項が 162 である等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

5 ★☆☆

(1)　初項 5，公比 2，項数 6 の等比数列の和を求めよ。

(2)　初項が 3，公比が 2，末項が 96 である等比数列の和を求めよ。

6 ★★☆

数列 x，12，y が等比数列で，数列 68，y，x が等差数列となる x，y の値を求めよ。ただし，$0<x<y$ とする。

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

(1)　等差数列 13，8，3，…… の一般項 a_n を求めよ。また，第 15 項を求めよ。

(2)　第 53 項が -47，第 77 項が -95 である等差数列 $\{a_n\}$ において

（ア）　一般項を求めよ。　　　　　　　　　　　（イ）　-111 は第何項か。

（ウ）　初めて負になるのは第何項か。

$\boxed{2}$

次のような和 S を求めよ。

(1)　等差数列 1，4，7，……，97 の和

(2)　初項 200，公差 -5 の等差数列の初項から第 100 項までの和

$\boxed{3}$

第 5 項が 100，第 10 項が 85 の等差数列について

(1)　50 はこの数列の項となりうるか。

(2)　初項から第 n 項までの和 S_n が負となる最小の n の値を求めよ。

(3)　和 S_n が最大となる n の値を求めよ。

$\boxed{4}$

次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　45，15，5，……

(2)　第 3 項が 12，第 7 項が 192 の等比数列

$\boxed{5}$

(1)　初項 2，公比 -3，項数 5 の等比数列の和を求めよ。

(2)　初項 162，公比 $-\dfrac{1}{3}$，末項 2 の等比数列の和を求めよ。

$\boxed{6}$

数列 -5，a，b が等差数列，数列 a，b，45 が等比数列をなす。このとき，a，b の値を求めよ。

第１講　レベルＡ

$\boxed{1}$

等差数列をなす３つの数がある。その和は 27 で，平方の和は 693 である。各数を求めよ。

$\boxed{2}$

20 から 200 までの自然数のうち，次のような数の和を求めよ。

(1)　3 の倍数　　(2)　7 の倍数　　(3)　5 で割って 2 余る数

(4)　7 で割り切れない数　　(5)　3 または 7 の倍数

$\boxed{3}$

ある等差数列の初項から第 5 項までの和が -5，第 6 項から第 10 項までの和が 145 である。第 11 項から第 15 項までの和を求めよ。

$\boxed{4}$

一般項が $a_n=2n-5$ である数列 $\{a_n\}$ について

(1)　数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを証明し，その初項と公差を求めよ。

(2)　一般項が $b_n=a_{3n}$ である数列 $\{b_n\}$ は等差数列であることを証明せよ。
　また，等差数列 $\{b_n\}$ の初項と公差を求めよ。

$\boxed{5}$

各項の逆数を項とする数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ が等差数列になるとき，$\{a_n\}$ を調和数列という。

数列　1，x，$\dfrac{1}{2}$，y，……　が調和数列であるとき，x，y の値と一般項を求めよ。

$\boxed{6}$

等比数列をなす 3 つの実数の和が 15，積が -1000 であるとき，この 3 つの実数を求めよ。

$\boxed{7}$

毎年初めに x 円ずつを積み立てて，5 年間で 10 万円にしたい。何円ずつ貯金すればよいか。ただし，年利率 2 %，1 年ごとの複利で，$(1.02)^5=1.10$ として計算し，円未満は切り上げよ。

第１講　レベルＢ

$\boxed{1}$［東北学院大］

m，n は正の整数で $m<n$ とする。このとき，m 以上 n 以下の分数で，5 を分母とし，5 の倍数でない整数を分子とするもの全体の和を求めよ。

$\boxed{2}$

初項から第 10 項までの和が 6，初項から第 20 項までの和が 24 である等比数列について，次のものを求めよ。ただし，公比は実数とする。

(1)　初項から第 30 項までの和

(2)　第 31 項から第 40 項までの和

$\boxed{3}$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を $a_n=3n-1$，$b_n=2^n$ とする。数列 $\{b_n\}$ の項のうち数列 $\{a_n\}$ の項でもあるものを小さい方から並べて数列 $\{c_n\}$ を作るとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$［岐阜薬科大］

自然数からなる等差数列がある。この等差数列の項の最大値は 27 で，項の和は 75 である。この等差数列をすべて求めよ。

６　和の記号 $\sum$

$\boxed{1}$ いろいろな数列の和の公式

$\sum_{k=1}^{n} c = nc$　　とくに　$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$　　$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$　　$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$　$(r \neq 1)$

$\boxed{2}$ 和の記号 $\sum$ の性質

１　$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$,　$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

２　$\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$　　ただし，p は k に無関係な定数

第２講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の数列の和を，$\sum$ を用いないで，各項を書き並べて書け。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)$　　(2) $\sum_{m=2}^{9}5^m$　　(3) $\sum_{k=1}^{n-1}2k^2$

$\boxed{2}$ ★☆☆

次の数列の初項から第 n 項までの和を $\sum$ を用いて表せ。

(1) $3+4+5+6+\cdots\cdots$　　(2) $1^2+4^2+7^2+10^2+\cdots\cdots$

$\boxed{3}$ ★★☆

次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　　(2) $\sum_{i=1}^{n}(i-1)(i-5)$　　(3) $\sum_{k=1}^{n}(k^3-4k)$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-5k)$　　(5) $\sum_{k=1}^{n-1}3^k$

$\boxed{4}$ ★★☆

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 1^3，3^3，5^3，7^3，……　　(2) $1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot5$，$4\cdot7$，……

$\boxed{5}$ ★★☆

次の数列の第 k 項を k の式で表せ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 2，$2+4$，$2+4+6$，$2+4+6+8$，……

(2) 2，$2+6$，$2+6+18$，$2+6+18+54$，……

(3) 1^2，1^2+2^2，$1^2+2^2+3^2$，$1^2+2^2+3^2+4^2$，……

$\boxed{6}$ ★★★

次の数列の和を求めよ。

$$1\cdot n,\quad 2\cdot(n-1),\quad 3\cdot(n-2),\quad \cdots\cdots,\quad (n-1)\cdot 2,\quad n\cdot 1$$

第２講　例題演習

$\boxed{1}$

次の数列の和を，$\sum$ を用いないで，各項を書き並べて書け。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 3k$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} 2^{k+1}$　　(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i+1}$

$\boxed{2}$

次の数列の初項から第 n 項までの和を $\sum$ を用いて表せ。

(1) $1+4+7+10+\cdots\cdots$　　(2) $1+3+9+27+\cdots\cdots$

$\boxed{3}$

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-7)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k^2-4k+2)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^3-1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$　　(5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-1)^2$　　(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3^k+2)$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4k+7)$

$\boxed{4}$

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 3^2，5^2，7^2，9^2，11^2，$\cdots\cdots$　　(2) $1\cdot2$，$2\cdot7$，$3\cdot12$，$4\cdot17$，$\cdots\cdots$

(3) $1\cdot3$，$3\cdot7$，$5\cdot11$，$7\cdot15$，$\cdots\cdots$

$\boxed{5}$

次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 1，$1+5$，$1+5+9$，$1+5+9+13$，$1+5+9+13+17$，$\cdots\cdots$

(2) 1，$1+3$，$1+3+9$，$1+3+9+27$，$\cdots\cdots$

(3) 1^2，1^2+3^2，$1^2+3^2+5^2$，$1^2+3^2+5^2+7^2$，$\cdots\cdots$

$\boxed{6}$

次の数列の和を求めよ。

(1) $1\cdot(n+1)$，$2\cdot(n+2)$，$3\cdot(n+3)$，$\cdots\cdots$，$n(n+n)$

(2) $1^2\cdot n$，$2^2\cdot(n-1)$，$3^2\cdot(n-2)$，$\cdots\cdots$，$n^2\cdot1$

第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$［武蔵工業大］

$\displaystyle\sum_{k=m+1}^{2m}(2k+1)>133$ を満たす最小の自然数 m を求めよ．

$\boxed{2}$［信州大］

次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}2\right)$　　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}3\cdot 2^{i-1}\right)$

$\boxed{3}$［神戸女学院大］

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

3，33，333，3333，……

第２講　レベルＢ

$\boxed{1}$［岐阜大］

(1)　数列 1，2，3，……，n において，隣接する 2 数の積の総和を求めよ。

(2)　数列 1，2，3，……，n において，互いに相異なり，かつ隣接しない 2 数の積の総和を求めよ。

$\boxed{2}$［大分大］

数列の和について次の一連の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$ を示せ。

(2)　多項式 $(k+1)^3-k^3$ の展開を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示せ。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めよ。結果は因数分解すること。

７　階差数列

$\boxed{1}$　階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う２項の差 $a_{n+1}-a_n=b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の **階差数列** という。

$n \geqq 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は　　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$　……①

注　上の ① は $n \geqq 2$ のときの式であるから，$n=1$ で成り立つとは限らない。

$\boxed{2}$　数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると

初項 a_1 は　$a_1=S_1$　　　　$n \geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

８　いろいろな数列の和

$\boxed{1}$　分数の数列の和

分数の数列の和では，次の変形がよく利用される。

$$\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(k+b)-(k+a)}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right) \quad (a \neq b)$$

$\boxed{2}$　(等差数列)×(等比数列) の数列の和

等比数列の公比が r であるとすると，求める和を S とおき，$S-rS$ を計算する。

$\boxed{3}$　群数列

数列を，ある規則によっていくつかの組 (群) に分けて考えるとき，これを **群数列** という。群数列では，もとの数列の規則，群の分け方の規則に着目する。

第３講　例題

$\boxed{1}$ ★★☆

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1)　8，15，24，35，48，……　　　(2)　5，7，11，19，35，……

$\boxed{2}$ ★★☆

和 $S=\dfrac{1}{3\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 15}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ ★★☆

初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=n^3-1$　　　(2)　$S_n=2^n-1$

$\boxed{4}$ ★★☆

次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$3,\ 5\cdot 2,\ 7\cdot 2^2,\ 9\cdot 2^3,\ \cdots\cdots$

$\boxed{5}$ ★★★

奇数の数列を 1 | 3，5 | 7，9，11 | 13，15，17，19 | 21，…… のように，第 n 群が n 個の数を含むように分けるとき

(1)　第 n 群の最初の奇数を求めよ。　　　(2)　第 n 群の総和を求めよ。

(3)　301 は第何群の何番目に並ぶ数か。

$\boxed{6}$ ★★★

n は自然数とする。座標平面上の 3 点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を頂点とする三角形の周および内部にある格子点（x 座標，y 座標がともに整数である点）の個数を求めよ。

第３講　例題演習

$\boxed{1}$

次の数列の一般項を求めよ。

(1)　2，10，24，44，70，102，140，……　　　(2)　3，4，7，16，43，124，……

$\boxed{2}$

次の和 S を求めよ。

(1)　$S=\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(2)　$S=\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

$\boxed{3}$

初項から第 n 項までの和が次の式で表される数列の一般項を求めよ。

(1)　$5n-n^2$　　　(2)　n^3+2　　　(3)　2^n+3

$\boxed{4}$

和 $S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$ を求めよ。

$\boxed{5}$

初項 1，公差 3 の等差数列を，次のように 1 個，2 個，3 個，…… と群に分ける。

$$1 \mid 4,\ 7 \mid 10,\ 13,\ 16 \mid 19,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最初の数を求めよ。

(2)　第 n 群に含まれる数の和を求めよ。

(3)　148 は第何群の何番目の数か。

$\boxed{6}$

n は自然数とする。座標平面上の 3 点 $(0,\ 0)$，$(3n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を頂点とする三角形の周および内部にある格子点の個数を求めよ。

第３講　レベルＡ

$\boxed{1}$ [千葉工業大]

数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n=-2n^2+15n$ と表される。このとき，$a_n=$ ${}^{ア}\boxed{}$ であり，S_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の最大値は ${}^{イ}\boxed{}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}|a_n|=$ ${}^{ウ}\boxed{}$ である。

$\boxed{2}$ [岩手大]

次の数列の一般項を求めよ。

$$6,\ 24,\ 60,\ 120,\ 210,\ 336,\ 504,\ \cdots\cdots$$

$\boxed{3}$

次の数列の和 S を求めよ。

(1)　$1,\ \dfrac{1}{1+2},\ \dfrac{1}{1+2+3},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{1+2+\cdots\cdots+n}$

(2)　$\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3},\ \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4},\ \dfrac{1}{3\cdot4\cdot5},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(3)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$

$\boxed{4}$ [東京薬科大]

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\log_5\frac{n+2}{n}=$ ${}^{ア}\boxed{}\log_5 2+{}^{イ}\boxed{}\log_5 3+{}^{ウ}\boxed{}\log_5 11$ である。

$\boxed{5}$

次の連立不等式の表す領域に含まれる格子点 (x 座標，y 座標がともに整数である点) の個数を求めよ。ただし，n は自然数とする。

(1)　$x\geqq0,\ y\geqq0,\ x+2y\leqq2n$　　　(2)　$x\geqq0,\ y\leqq n^2,\ y\geqq x^2$

第３講　レベルＢ

$\boxed{1}$［福島大］

数列 $\{a_n\}$ に対して，$b_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。

(1) $\{a_n\}$ が初項 1，公差 2 の等差数列であるとき b_n を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ が等差数列であるとき，$\{b_n\}$ が等差数列であることを示せ。

(3) $\{b_n\}$ が等差数列であるとき，$\{a_n\}$ が等差数列であることを示せ。

$\boxed{2}$［青山学院大］

数列 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{2}{4}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{2}{6}$，…… において，初項から第 800 項までの和を求めよ。

$\boxed{3}$［京都産業大］

1 から順に自然数を並べて，$1\mid 2,\ 3\mid 4,\ 5,\ 6,\ 7\mid \cdots\cdots \mid \cdots\cdots$ のように 1 個，2 個，4 個，…… となるように群に分ける。ただし，第 n 群が含む数の個数は 2^{n-1} 個である。次のものを求めよ。

(1) 第 4 群の初めの数と終わりの数　　(2) 第 5 群に含まれる数の総和

(3) 第 n 群に含まれる数の総和が 10000 を超えない最大の n

$\boxed{4}$［京都大］

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n は自然数であるとして，不等式 $x>0$，$y>0$，$\log_2\dfrac{y}{x}\leqq x\leqq n$ を満たす格子点の個数を求めよ．

第４講　漸化式

9　漸化式

$\boxed{1}$　**漸化式**

数列 $\{a_n\}$ において，たとえば $a_{n+1}=2a_n+3$ のように，前の項から次の項を決めるための関係式を **漸化式** という。

$\boxed{2}$　**漸化式と一般項**　初項を a とする。

1　$a_{n+1}=a_n+d$ $\longrightarrow$ 公差 d の等差数列　$a_n=a+(n-1)d$

2　$a_{n+1}=ra_n$ $\longrightarrow$ 公比 r の等比数列　$a_n=ar^{n-1}$

3　$a_{n+1}=a_n+f(n)$ $\longrightarrow$ 階差数列の第 n 項が $f(n)$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

4　$a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\fallingdotseq 0,\ p\fallingdotseq 1)$ $\longrightarrow$ $a_{n+1}-c=p(a_n-c)$ の形に変形できる。

(c は $c=pc+q$ を満たす数)

$\boxed{3}$　**隣接３項間の漸化式**　$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$　$(p\fallingdotseq 0)$

２次方程式 $px^2+qx+r=0$ の２つの解を α，β とする。

①　$\alpha\fallingdotseq\beta$ の場合

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$
$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

と変形する。数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は公比 β の等比数列，数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は公比 α の等比数列である。

特に，α，β の一方が１ (このとき，$p+q+r=0$) の場合，階差数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ が等比数列になる。

②　$\alpha=\beta$ (重解) の場合

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

と変形する。数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は公比 α の等比数列である。

第４講　例題

$\boxed{1}$★☆☆

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4$　　(2)　$a_1=-3$，$a_{n+1}=-2a_n$

$\boxed{2}$★★☆

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=4$，$a_{n+1}-a_n=3n^2$　　(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4^n$

$\boxed{3}$★☆☆

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$　　(2)　$a_1=2$，$3a_{n+1}+2a_n+15=0$

$\boxed{4}$★★☆

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+3}$$

$\boxed{5}$★★☆

$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{6}$★★★

$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

第４講　例題演習

$\boxed{1}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=6$　　(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=-5a_n$

$\boxed{2}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+(-2)^n$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4n+3$

$\boxed{3}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4$　　(2)　$a_1=-\dfrac{1}{12}$，$12a_{n+1}-8a_n+3=0$

$\boxed{4}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+4}$$

$\boxed{5}$

$a_1=4$，$a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{6}$

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n-1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

第４講　レベルＡ

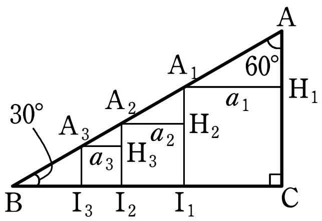
$\boxed{1}$ ［大阪府立大］

数列 $\{a_n\}$ が，次の条件によって定義されているとき，一般項 a_n を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3^n$　　(2)　$a_1=a$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{a}{2^n}$

$\boxed{2}$

$A=60°$，$B=30°$，AC$=1$ である直角三角形 ABC 内に，右の図のように，1 辺の長さが a_1，a_2，a_3，$\cdots$ の正方形が並んでいる。



(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　右の図の $\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{H}_2$ と $\triangle$ABC が相似であることに着目して，一般に a_n，a_{n+1} の間に成り立つ関係式を導け。

(3)　a_n の値を n を用いて表せ。

第４講　レベルＢ

$\boxed{1}$

$n \geqq 2$ とする。平面上に n 個の円があって，それらのどの 2 個の円も互いに交わり，3 個以上の円は同一の点では交わらない。これらの円によって，交点はいくつできるか。

$\boxed{2}$［神戸大］

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が $a_1=5$，$b_1=7$ を満たし，更にすべての実数 x とすべての自然数 n に対して

$$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)dt$$

を満たすとする。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$c_n=3^{n-1}$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$c_n=n$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。