第５講　三角関数の極限／関数の連続性

７　三角関数と極限

1　三角関数の極限

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，$\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$　（角の単位はラジアン）

８　関数の連続性

1　関数の連続性

１　関数 $f(x)$ において，その定義域内の x の値 a に対して，極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在し，かつ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき，$f(x)$ は $x=a$ で **連続** であるという。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続でないとき，$f(x)$ は $x=a$ で **不連続** であるという。

２　関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに $x=a$ で連続ならば，次の関数はいずれも $x=a$ で連続である。

$kf(x)$　（k は定数），$f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$，

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$　$(g(a) \neq 0)$

2　ガウス記号 [　]

$[x]$＝(x を超えない最大の整数)　　ただし，x は実数

3　中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して　$f(c)=k$，$a<c<b$　を満たす実数 c が少なくとも１つある。

注　特に，$f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば，方程式 $f(x)=0$ は $a<x<b$ の範囲に少なくとも１つの実数解をもつ。

第５講　例題

$\boxed{1}$★☆☆

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan x}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

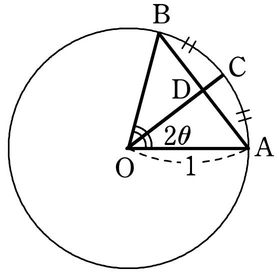
$\boxed{2}$★★☆

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}x\sin\frac{1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}$

$\boxed{3}$★★☆

半径 1 の円 O の周上に中心角 2θ の弧 AB をとり，弧 AB を 2 等分する点を C とする。また，線分 OC と弦 AB の交点を D とする。弧 AB の長さを $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ で表すとき，極限 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{CD}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}^2}$ を求めよ。



$\boxed{4}$★★☆

次の関数が，与えられた x の値で連続であるか不連続であるかを調べよ。

(1) $f(x)=x^5+x$ $(x=0)$　(2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $(x=-1)$　(3) $f(x)=[-x]$ $(x=0)$

$\boxed{5}$★★★

関数 $y=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^2(1-x^n)}{1+x^n}$ のグラフをかけ。また，この関数が連続な区間をいえ。

$\boxed{6}$★☆☆

次の方程式は与えられた範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

(1) $x-2\sin x-3=0$ $(0<x<\pi)$　(2) $x=3^{-x}$ $(0<x<1)$

$\boxed{7}$★★★

$f(x)$，$g(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ で連続な関数とする。

$f(a)>g(a)$ かつ $f(b)<g(b)$ であるとき，方程式 $f(x)=g(x)$ は $a<x<b$ に実数解をもつことを示せ。

第５講　例題演習

$\boxed{1}$

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$

$\boxed{2}$

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-1)\sin\frac{1}{x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

$\boxed{3}$ [湘南工科大]

半径 r の円 O の周上に定点 A と動点 P がある。A における円 O の接線に P から下ろした垂線を PH，$\angle\mathrm{POA}=\theta$ とする。$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{PH}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}$ を求めよ。

$\boxed{4}$

次の関数 $f(x)$ について，与えられた x の値で連続であるか不連続であるかを調べよ。

(1) $f(x)=x^3+2x$　$(x=0)$　(2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$　$(x=-1)$

(3) $f(x)=[x]$　$(x=0)$　(4) $f(x)=[\sin x]$　$\left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{5}$

次の関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。また，$f(x)$ が不連続である x の値をいえ。

(1) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$　(2) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin 2x+1}{n\sin x+1}$

$\boxed{6}$

(1) 方程式 $x^4-5x+2=0$ は，少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

(2) 方程式 $x=6\cos x$ は，$-\dfrac{2}{3}\pi<x<-\dfrac{\pi}{3}$，$-\dfrac{\pi}{3}<x<\pi$ の範囲に，それぞれ実数解をもつことを示せ。

$\boxed{7}$

関数 $f(x)$，$g(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(x)$ の最大値は $g(x)$ の最大値よりも大きく，$f(x)$ の最小値は $g(x)$ の最小値よりも小さい。このとき，方程式 $f(x)=g(x)$ は，$a \leqq x \leqq b$ の範囲に解をもつことを示せ。

第５講　レベルＡ

1

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

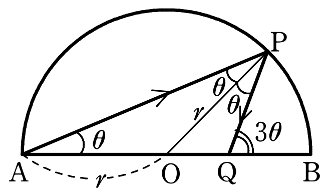
(4) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}x\sin\frac{1}{4x}$　　(5) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 3\theta}{\theta^2}$

2

等式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

3

半球形の凹面鏡がある。中心を O，半径を r，1 つの直径を AB とする。A から AB と θ の角をなす光線が鏡の点 P で反射し，AB と交わる点を Q とすると，$\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{OPQ}$ である。
P が限りなく B に近づくとき，Q はどのような点に近づくか。



4

次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。ただし，$[x]$ (ガウス記号) は実数 x を超えない最大の整数を表す。

(1) $f(x)=x^3$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$　　(3) $f(x)=[\cos x]$

5 [東邦大]

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$ で定義される関数 $f(x)$ が $x=0$ において連続であるとき，定数 a の値を求めよ。

6 [公立はこだて未来大]

$\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ とする。関数 $f(x)$ がすべての実数 x で連続となるように，定数 a，b の値を定めよ。

第５講　レベルＢ

$\boxed{1}$［大阪市立大］

次の極限が有限の値となるように定数 a，b を定め，そのときの極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}$$

$\boxed{2}$

原点を O とする。曲線 $y=x\sin x$ $(0<x<\pi)$ 上の動点 P と x 軸の正の部分にある動点 Q が，OP＝OQ の関係を保ちながら動くとする。次の問いに答えよ。

(1)　P の座標を $(t,\ t\sin t)$ とするとき，Q の座標を t を用いて表せ。

(2)　直線 PQ と y 軸との交点 R の座標を求めよ。

(3)　点 P が原点 O に限りなく近づくとき，点 R の近づく点を求めよ。

$\boxed{3}$［千葉大］

数列 a_1，a_2，a_3，…… を次のように定義する。

$$a_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　すべての自然数 n に対して，$a_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{2}{a_n}$ が成り立つことを示せ。

(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ の和を求めよ。

$\boxed{4}$［東京学芸大］

k を自然数とする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\cos x)^{n-1}-(\cos x)^{n+k-1}\right\}$ がすべての実数 x に対して収束するとき，次の各問いに答えよ．

(1)　k の条件を求めよ．

(2)　上の級数の和を $f(x)$ とおくとき，関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続でないことを示せ．

$\boxed{5}$［東京女子大］

$f(x)=x^3+ax^2+(a-3)x-1$ とする．

(1)　曲線 $y=f(x)$ は aに無関係な 2 定点を通ることを示せ．

(2)　方程式 $f(x)=0$ は 3 つの異なる実数解を持つことを示せ．

(3)　関数 $f(x)$ が極小になる x の値を $x(a)$ とおく．$\displaystyle\lim_{a\to\infty}x(a)$ を求めよ．

章末問題A

$\boxed{1}$ [東京電機大]

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ [広島大]

数列 $\{a_n\}$ は，関係式

$$a_1=2,\ (a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n),\ a_{n+1}>a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定まっている．

(1) a_2，a_3，a_4 を計算せよ．

(2) 一般項 a_n を n の式で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)$ を求めよ．

$\boxed{3}$ [宮崎大]

座標平面上の曲線 $y=x^2$ を C とする。正の数 t に対し，曲線 C，x 軸，および直線 $x=t$ で囲まれる部分の面積を $S(t)$ と表す。数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=2<a_2<a_3<\cdots\cdots$ および任意の自然数 n に対して $S(a_{n+1})=8S(a_n)$ を満たすとき，次の各問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を，n を用いて表せ。

(2) 曲線 C，C 上の点 $(a_n,\ {a_n}^2)$ における接線，および直線 $x=a_{n+1}$ で囲まれる部分の面積 T_n を，n を用いて表せ。

(3) (2) の T_n に対し，$U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}T_k$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n-1}}{{a_n}^3}$ を求めよ。

$\boxed{4}$ [名古屋工業大]

関数 $f(x)=\sqrt{2x+1}$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を次で定義する。

$$a_1=3,\ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

方程式 $f(x)=x$ の解を α とおく。

(1) 自然数 n に対して，$a_n>\alpha$ が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して，$a_{n+1}-\alpha<\dfrac{1}{2}(a_n-\alpha)$ が成り立つことを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ。

5 [岡山大]

$b_n=(-1)^{n-1}\log\dfrac{n+2}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{b_n\}$ に対して，

$S_n=b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n$ とする。このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

6 [福岡大]

$a>1$のとき，無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n\cos\dfrac{n\pi}{2}$ の和を a を用いて表せ。

7 [大阪市立大]

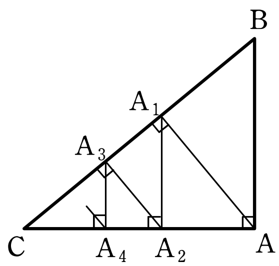
A 君，B 君，C 君が順にさいころを投げ，最初に 1 の目を出した者を勝者とする。1 回目は A 君が投げ，2 回目は B 君が投げ，3 回目は C 君が投げ，勝者が決まらないときは，また A 君から勝者が決まるまで繰り返すものとする。

(1) k 回以内で勝者が決まる確率を，k を用いて表せ。

(2) $3n$ 回以内で B 君が勝者になる確率 p_n を，n を用いて表せ。ただし，n は自然数とする。また，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$ を求めよ。

8

右の図のような直角三角形 ABC の直角の頂点 A から，順に，垂線 AA_1，A_1A_2，A_2A_3，…… を下ろすとき，$\triangle CAA_1$，$\triangle CA_1A_2$，$\triangle CA_2A_3$，…… の面積の総和が $\triangle ABC$ の面積を超えないためには，$\angle C$ の大きさはどんな範囲になければならないか。



$\boxed{9}$ [宮城教育大]

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1=1,\ b_1=0,$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n-\frac{2}{3}b_n,\ b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定義する。i を虚数単位として，$r>0$ と $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ を

$$\frac{1+2i}{3}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

が成り立つように定める。

(1) r の値を求めよ。

(2) 数学的帰納法を用いて

$$a_n+b_ni=\left(\frac{1+2i}{3}\right)^{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 複素数 z に対して，$z\neq 1$ ならば

$$1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ。

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の和を求めよ。

$\boxed{10}$ [甲南大]

円 $C_1：x^2+y^2=1$ に内接する正方形の面積を a_1 とする。つぎに，この正方形に内接する円 C_2 を作成し，C_2 に内接する正方形の面積を a_2 とする。このような手順にならい，正方形に内接する円 C_n $(n\geqq 3)$ を順次作成し，C_n に内接する正方形の面積を a_n とする。

無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{11}$ [九州大]

座標平面上の 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 0)$，B$(1,\ \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり，A，B とは異なる点とする。線分 AB 上の点 P_2，P_3，…… を次のように順に定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。$n\to\infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

$\boxed{12}$ [筑波大]

△PQR において ∠RPQ$=\theta$,

∠PQR$=\dfrac{\pi}{2}$ とする。

点 P_n ($n=1$, 2, 3, ……) を次で定める。

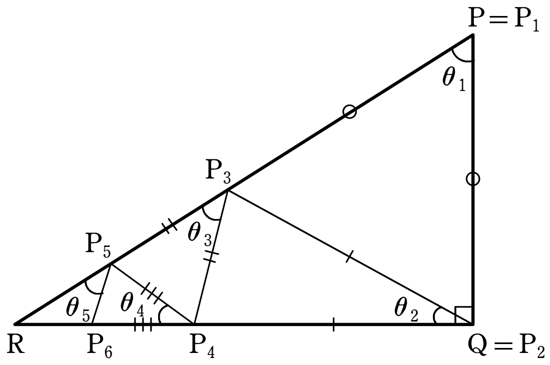
$$\mathrm{P}_1=\mathrm{P},\ \mathrm{P}_2=\mathrm{Q},$$
$$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}=\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$$

ただし，点 P_{n+2} は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}$ 上にあるものとする。

実数 θ_n ($n=1$, 2, 3, ……) を

$$\theta_n=\angle\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}\quad(0<\theta_n<\pi)$$

で定める。



(1) θ_2, θ_3 を θ を用いて表せ。

(2) $\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}$ ($n=1$, 2, 3, ……) は n によらない定数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n$ を求めよ。

$\boxed{13}$ [弘前大]

三角関数の微分を考える上で基礎となる極限に関する等式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を，図形の性質を用いて証明せよ。ただし，角の単位は弧度法によるものとする。

$\boxed{14}$ [三重大]

平面上の 3 点 O，A，B がこの順で同一直線上に並んでおり，OA$=2$，OB$=3$ であるとする。また P は，OP$=1$ で $0<\angle\mathrm{AOP}<\pi$ となる平面上の点とする。$\theta=\angle\mathrm{AOP}$ として，次の問いに答えよ。

(1) AP と BP を θ で表せ。

(2) $\cos\angle\mathrm{BAP}$ と $\sin\angle\mathrm{BAP}$ を θ で表せ。

(3) 3 点 A，B，P を通る円の半径を R としたとき，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\theta R$ を求めよ。

$\boxed{15}$ [愛知教育大]

θ を$0 \leqq \theta \leqq \pi$ を満たす実数とする。単位円周上の点 P を，動径 OP と x 軸の正の部分とのなす角が θ である点とし，点 Q を x 軸の正の部分の点で，点 P からの距離が 2 であるものとする。また，$\theta=0$ のときの点 Q の位置を A とする。

(1) 線分 OQ の長さを θ を使って表せ。

(2) 線分 QA の長さを L とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{L}{\theta^2}$ を求めよ。

$\boxed{16}$ [秋田大]

原点を O とする座標平面上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ をとり，O を中心とする半径 1 の円の第 1 象限にある部分を C とする。3 点 P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$，R は C の周上にあり，$2y_1=y_2$ および $\angle\mathrm{AOP}=4\angle\mathrm{AOR}$ を満たすものとする。直線 OQ と直線 $y=1$ の交点を Q$'$，直線 OR と直線 $y=1$ の交点を R$'$ とする。$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標を θ を用いて表せ。

(2) 点 Q$'$ と点 R$'$ の座標を θ を用いて表せ。

(3) 点 P が点 A に限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{BR}'}{\mathrm{BQ}'}$ の極限を求めよ。ただし，

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}=1$ であることは用いてよい。

章末問題B

$\boxed{1}$ [名古屋大]

△ABCで辺ACを $s:(1-s)$ に内分する点をP，辺BCを $t:(1-t)$ に内分する点をQ，線分AQと線分BPの交点をRとする。このとき，

△APRの面積＝2×(△BQRの面積)が成り立っているとする。

(1)　s を t を用いて表せ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}$ を求めよ。ただし，t が正の範囲で0に限りなく近づくとき，$t\longrightarrow+0$ と表す。

$\boxed{2}$ [埼玉大]

$t>0$ とし，xy 平面上の3点O(0，0)，A(t，0)，B(3，4)を頂点とする三角形を考える。

(1)　∠BOAの二等分線の方向ベクトルで，大きさが1のものを求めよ。

(2)　∠BOAの二等分線と∠OABの二等分線の交点をPとする。Pの座標を t を用いて表せ。

(3)　$t\longrightarrow\infty$ とするとき，(2)で求めた交点Pの x 座標の極限を求めよ。

$\boxed{3}$ [京都大]

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す。この数列が

$$a_1=1,\quad \lim_{n\to\infty}S_n=1,\quad n(n-2)a_{n+1}=S_n\quad(n\geqq1)$$

を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{4}$ [大阪市立大]

p，q は正の有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるとする。自然数 n に対し，有理数 a_n，b_n を $(p+\sqrt{q})^n=a_n+b_n\sqrt{q}$ によって定める。

(1)　$(p-\sqrt{q})^n=a_n-b_n\sqrt{q}$ を示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{q}$ を示せ。

$\boxed{5}$ [東北大]

xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点(x，y)を格子点とよぶ。m を正の整数とするとき，放物線 $y=x^2-2mx+m^2$ と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D とする。

(1)　D の周上の格子点の数 L_m を m で表せ。

(2)　D の周上および内部の格子点の数 T_m を m で表せ。

(3)　D の面積を S_m とする。$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{T_m}{S_m}$ を求めよ。

6 [神戸大]

座標平面上の点 (p, q) で，p と q がともに整数であるものを格子点という．

(1) 自然数 n に対し，$p+2q=n$，$p>0$，$q>0$ を満たす格子点 (p, q) の個数を a_n とする．a_n を求めよ．

(2) 自然数 n に対し，$p+2q<n$，$p>0$，$q>0$ を満たす格子点 (p, q) の個数を b_n とする．b_n を求めよ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$ と $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n^2}$ を求めよ．

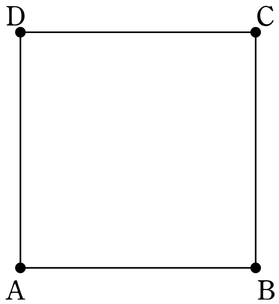
7 [神戸大]

動点Pが，図のような正方形ABCDの頂点Aから出発し，さいころを振るごとに，次の規則により正方形のある頂点から他の頂点に移動する。

出た目の数が2以下なら辺ABと平行な方向に移動する。

出た目の数が3以上なら辺ADと平行な方向に移動する。

n を自然数とするとき，さいころを $2n$ 回振った後に動点PがAにいる確率を a_n，Cにいる確率を c_n とする。



(1) a_1 を求めよ。

(2) さいころを $2n$ 回振った後，動点PはAまたはCにいることを証明せよ。

(3) a_n，c_n を n を用いてそれぞれ表せ。

(4) $\lim_{n\to\infty}a_n$，$\lim_{n\to\infty}c_n$ をそれぞれ求めよ。

8 [宮城教育大]

2つの数列 $\{\theta_n\}$，$\{a_n\}$ を漸化式

$$\theta_1=\frac{\pi}{4},\ \theta_{n+1}=\frac{\pi-\theta_n}{2}\quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

$$a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{|2-a_n|}\quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定義するとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ。また $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\cos\theta_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta_n}{2}}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3) $2\cos\theta_n=a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(4) $\lim_{n\to\infty}a_n$ の値を求めよ。

$\boxed{9}$［名古屋大］

a を正の定数とする。$f(x)=x^2-a$ として，グラフ $y=f(x)$ 上の点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_{n+1} とする。

このようにして，x_1 から順に x_2，x_3，x_4，…… を作る。$x_1>\sqrt{a}$ とする。

(1)　x_{n+1} を x_n を用いて表せ。　　(2)　$\sqrt{a}<x_{n+1}<x_n$ であることを示せ。

(3)　$\left|x_{n+1}-\sqrt{a}\right|<\dfrac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{a}\right|$ であることを示せ。　　(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

$\boxed{10}$［茨城大］

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ について，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。発散するときは「発散する」と解答せよ。

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n+4}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$\boxed{11}$［奈良女子大］

数列 $\{S_n\}$，$\{T_n\}$ の一般項がそれぞれ

$$S_n=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}$$

$$T_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

で表されているとする。

(1)　正の整数 n に対して

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

が成り立つことを用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{4}$ を示せ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。不等式 $S_n<1+T_{n-1}$ を示せ。

(3)　数列 $\{S_n\}$ は収束することがわかっている。その極限値を S とするとき，不等式 $\dfrac{9}{8}\leqq S\leqq\dfrac{5}{4}$ を示せ。

章末問題B

$\boxed{12}$［大分大］

0 でない実数 r が $|r|<1$ を満たすとき，次の問いに答えよ。ただし，自然数 n に対して $\lim_{n\to\infty} nr^n=0$，$\lim_{n\to\infty} n(n-1)r^n=0$ である。

(1)　$R_n=\sum_{k=0}^{n} r^k$ と $S_n=\sum_{k=0}^{n} kr^{k-1}$ を求めよ。

(2)　$T_n=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2}$ を求めよ。

(3)　$\sum_{k=0}^{\infty} k^2r^k$ を求めよ。

$\boxed{13}$［九州大］

チーム A とB が複数回試合を行って優勝チームを決めるものとする。ただし，いずれの試合においても，引き分けはないものとし，チーム A が勝つ確率は q $(0<q<1)$ であり，各試合の勝敗は互いに独立に決まるとする。このとき，次の 2 種類のルールを考える。

ルール 1：最大 3 回試合を行い，先に 2 勝したチームを優勝とする。

ルール 2：どちらか一方が 2 連勝するまで試合を繰り返し，2 連勝したチームを優勝とする。

(1)　ルール 1 を採用した場合に，チーム A が優勝する確率 $P_1(q)$ を q で表せ。

(2)　ルール 2 を採用した場合に，チーム A が優勝する確率 $P_2(q)$ を q で表せ。

(3)　$P_1(q)\geqq P_2(q)$ となる条件を求めよ。

$\boxed{14}$［島根大］

1 辺の長さが a の正三角形 T_1 の頂点を A_1，B_1，C_1 とする．t を正の実数とするとき，辺 A_1B_1，B_1C_1，C_1A_1 を $t:1$ に内分する点をそれぞれ A_2，B_2，C_2 とし，3 点 A_2，B_2，C_2 を結んで正三角形 T_2 を作る．以下同様に正三角形 T_3，T_4，T_5，…… を作る．

(1)　T_2 の 1 辺の長さを求めよ．

(2)　正三角形 T_1，T_2，T_3，…… の面積の総和 $S(t)$ を求めよ．

(3)　$S(t)$ の最小値を求めよ．

章末問題B

$\boxed{15}$ [東京大]

a を自然数 (すなわち 1 以上の整数) の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作 $(*)$ を考える。

$(*)$ 袋 U から球を 1 個取り出し，

(A) 取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(B) 取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作 $(*)$ を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1，p_2 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} p_n$ を求めよ。

$\boxed{16}$ [東北大]

n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle \mathrm{OA_1A_2}$ は $\angle \mathrm{OA_2A_1}=90^\circ$，$\mathrm{OA_1}=1$，$\mathrm{A_1A_2}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ を満たすとする。$\mathrm{A_2}$ から $\mathrm{OA_1}$ へ垂線を下ろし，交点を $\mathrm{A_3}$ とする。$\mathrm{A_3}$ から $\mathrm{OA_2}$ へ垂線を下ろし，交点を $\mathrm{A_4}$ とする。以下同様に，$k=4$，5，…… について，A_k から OA_{k-1} へ垂線を下ろし，交点を A_{k+1} として，順番に $\mathrm{A_5}$，$\mathrm{A_6}$，…… を定める。

$\overrightarrow{h_k}=\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $k=1$，2，…… のとき，ベクトル $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積 $\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ を n と k で表せ。

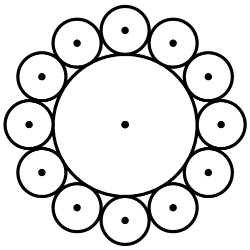
(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。

$\boxed{17}$［岡山大］

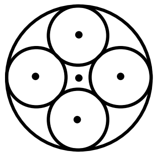
平面上に半径 1 の円 C がある。この円に外接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図 (例 1) のように配置し，その 1 つの円の半径を R_n とする。また，円 C に内接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図 (例 2) のように配置し，その 1 つの円の半径を r_n とする。ただし，$n \geqq 3$ とする。

(1) R_6，r_6 を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2(R_n - r_n)$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を用いてよい。



例 1 ： $n=12$ の場合



例 2 ： $n=4$ の場合

章末問題C

$\boxed{1}$ [東京工業大]

正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$ [東京工業大]

正の数 a に対して，放物線 $y=x^2$ 上の点 A $(a,\ a^2)$ における接線を，A を中心に $-30°$ 回転した直線を ℓ とする。ℓ と $y=x^2$ との交点で A でない方を B とする。更に点 $(a,\ 0)$ を C，原点を O とする。

(1)　ℓ の式を求めよ。

(2)　線分 OC，CA と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$，線分 AB と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ [京都大]

x，y を相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=0,\quad a_{n+1}=xa_n+y^{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点 $(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。

$\boxed{4}$ [神戸大]

a，b を実数とし，自然数 k に対して $x_k=\dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする。

(1)　$x_k=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}+\dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p，q，r を，a，b を用いて表せ。

(2)　$b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ。また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ。

$\boxed{5}$ [大阪大]

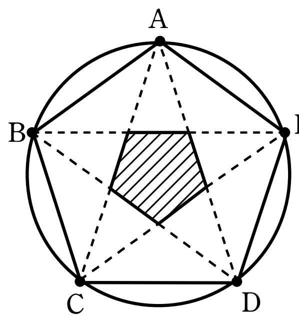
放物線 C：$y=x^2$ 上の点 $A_1(a_1,\ a_1{}^2)$，$A_2(a_2,\ a_2{}^2)$，$A_3(a_3,\ a_3{}^2)$，…… を，A_{k+2} $(k\geqq 1)$ における C の接線が直線 A_kA_{k+1} に平行であるようにとる。ただし，$a_1<a_2$ とする。三角形 $A_kA_{k+1}A_{k+2}$ の面積を T_k とし，直線 A_1A_2 と C で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$ を S を用いて表せ。

$\boxed{6}$ [大阪大]

円上の5点 A，B，C，D，E は反時計回りにこの順に並び，円周を5等分している。5点 A，B，C，D，E を頂点とする正五角形を R_1 とする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする。



斜線部分が R_2

(1) $\overrightarrow{AC}$ の大きさを y とするとき，$x^2=y(y-x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\overrightarrow{BC}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の5つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。R_2 の1辺の長さを x を用いて表せ。

(4) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の5つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$ を求めよ。

$\boxed{7}$ [神戸大]

n を自然数とする。つぼの中に，1の数字を書いた玉が1個，2の数字を書いた玉が1個，3の数字を書いた玉が1個，……，n の数字を書いた玉が1個，合計 n 個の玉が入っている。つぼから無作為に玉を1個とり出し，書かれた数字を見て，もとに戻す試行を n 回行う。

(1) 試行を n 回行ったとき，k の数字が書かれた玉をちょうど k 回とり出す確率を p_k とする。p_k を k の式で表せ。ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ とする。

(2) (1) で求めた p_1，p_2，p_3，……，p_n について，

$$q_n=2p_1+2^2p_2+2^3p_3+\cdots\cdots+2^np_n$$

とおく。この q_n について，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n$ の値を求めよ。

8 [東京大]

A，Bの2人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが1枚あり，最初はAがそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(a) Aがコインを持っているときは，コインを投げ，表が出ればAに1点を与え，コインはAがそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，AはコインをBに渡す。

(b) Bがコインを持っているときは，コインを投げ，表が出ればBに1点を与え，コインはBがそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，BはコインをAに渡す。

そしてA，Bのいずれかが2点を獲得した時点で，2点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点でAは1点，Bは2点を獲得しているのでBの勝利となる。

(1) A，Bあわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときにAの勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

9 [京都大]

n を2以上の自然数とする。x^{2n} を $x^2-x+\frac{n-1}{n^2}$ で割った余りを $a_n x+b_n$ とする。すなわち，x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n}=P_n(x)\left(x^2-x+\frac{n-1}{n^2}\right)+a_n x+b_n$$

が成り立っているとする。$\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

10 [神戸大]

A地点からB地点まで0または1の文字からなる信号を送る。A地点とB地点の間に中継点を $2n-1$ か所作り，AB間を $2n$ 個の小区間に分割すると，1つの区間において0と1が逆転して伝わる確率は $\frac{1}{4n}$ である。このとき，A地点を発した信号0がB地点に0として伝わる確率を P_{2n} とする。

(1) P_{2n} を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} P_{2n}$ を求めよ。

章末問題C

$\boxed{11}$［岡山大］

自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，関数 $f_n(x)=x^{n+1}(1-x)$ を考える。

(1)　曲線 $y=f_n(x)$ 上の点 $(a_n,\ f_n(a_n))$ における接線が原点を通るとき，a_n を n の式で表せ。ただし，$a_n>0$ とする。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする。また，(1) で求めた a_n に対して，$0\leqq x\leqq a_n$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$，x 軸，および直線 $x=a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする。B_n および C_n を n の式で表せ。

(3)　(2) で求めた B_n および C_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}$ を求めよ。ただし，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が自然対数の底 e であることを用いてよい。

$\boxed{12}$［大阪市立大］

n は 3 以上の整数とし，r は正の実数とする。周の長さが L の正 n 角形の周および内部からなる平面図形を P_n とし，その面積を A_n とする。また，P_n からの距離が r 以下である点の全体が作る平面図形を Q_n とする。(Q_n は P_n を含むことに注意せよ。)　Q_n の周の長さを L_n，面積を S_n とする。

(1)　A_n を L，n を用いて表せ。　　　(2)　L_n と S_n を L，A_n，r を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(L_n)^2}$ を求めよ。

$\boxed{13}$［神戸大］

$$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。2 つのベクトル $\overrightarrow{p_n}=(a_n,\ a_{n+1})$ と

$\overrightarrow{p_{n+1}}=(a_{n+1},\ a_{n+2})$ のなす角を θ_n とする。ただし，$0\leqq\theta_n\leqq\pi$ である。

(1)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$\tan\theta_n$ を n の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$ を示せ。ただし，必要であれば $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<\theta<\tan\theta$ であることを用いてよい。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n\theta_n$ を求めよ。

$\boxed{14}$ [横浜国立大]

O を原点とする xy 平面上に，点 $A_n\left(\cos\frac{\pi}{2^n},\ \sin\frac{\pi}{2^n}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ がある。また，次の (i) から (iii) を満たす点 P_1，P_2，P_3，…… および点 Q_1，Q_2，Q_3，…… がある。

(i)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，P_n，Q_n は半直線 OA_n 上にある。

(ii)　P_1 の座標は $(0,\ 1)$ である。

(iii)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$P_nP_{n+1}\perp OA_{n+1}$，$P_{n+1}Q_n\perp OA_n$ である。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$\dfrac{P_{n+2}Q_{n+1}}{P_{n+1}Q_n}$ を求めよ。

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty} OP_n$ を求めよ。

$\boxed{15}$ [東京大]

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O，P_0，P_1，……，P_n があり，次の 2 つの条件を満たしている。

(A)　$\angle P_{k-1}OP_k=\dfrac{\pi}{n}$ $(1\leqq k\leqq n)$，$\angle OP_{k-1}P_k=\angle OP_0P_1$ $(2\leqq k\leqq n)$

(B)　線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし，$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

$\boxed{16}$ [上智大]

関数 $y=f(x)$ は連続とする。

(1)　a を実数の定数とする。すべての実数 x に対して不等式

$$|f(x)-f(a)|\leqq\frac{2}{3}|x-a|$$

が成り立つなら，曲線 $y=f(x)$ は直線 $y=x$ と必ず交わることを中間値の定理を用いて証明せよ。

(2)　更に，すべての実数 x_1，x_2 に対して

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqq\frac{2}{3}|x_1-x_2|$$

が成り立つならば，(1) の交点はただ 1 つしかないことを証明せよ。