15

$\boxed{1}$

解答　(ア) 3　(イ) 2　(ウ) 6　(エ) 2　(オ) 2　(カ) 1　(キ) ⑨
(ク) ①　(ケ) ③　(コ) ①　(サ) ⑨　(シ) ②　(ス) ①

解説

(1)　$\sin\dfrac{\pi}{{}^{\text{ア}}3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるから，三角関数の合成により

$$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$
$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)={}^{\text{イ}}2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

と変形できる。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ であるから，y は $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{{}^{\text{ウ}}6}$ で最大値 ${}^{\text{エ}}2$ をとる。

(2)　(i)　$p=0$ のとき　$y=\sin\theta$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから，y は $\theta=\dfrac{\pi}{{}^{\text{オ}}2}$ で最大値 ${}^{\text{カ}}1$ をとる。

(ii)　$p>0$ のとき

加法定理 $\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$ を用いると

$$y=\sin\theta+p\cos\theta=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta\right)$$
$$=\sqrt{1+p^2}(\sin\alpha\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta)$$
$$=\sqrt{1+p^2}(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)$$
$$=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)\quad({}^{\text{キ}}⑨)$$

と表すことができる。ただし，α は

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\ ({}^{\text{ク}}①),\quad \cos\alpha=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\ ({}^{\text{ケ}}③),\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\alpha\leqq\theta-\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ であるから，$\cos(\theta-\alpha)$ は $\theta-\alpha=0$ すなわち $\theta=\alpha$ で最大となる。$\sqrt{1+p^2}>0$ であるから，このとき y も最大となる。

よって，y は $\theta=\alpha$ (${}^{\text{コ}}①$) で最大値 $\sqrt{1+p^2}$ (${}^{\text{サ}}⑨$) をとる。

(iii)　$p<0$ のとき

(ii) と同様に $y=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)$ と表すことができる。ただし，α は

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\quad \cos\alpha=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\quad \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$$

を満たすものとする。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\alpha\leqq\theta-\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ であるから，$\cos(\theta-\alpha)$ は $\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大となる。$\sqrt{1+p^2}>0$ であるから，このとき y も最大となる。

よって，y は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ (${}^{\text{シ}}②$) で最大値 1 (${}^{\text{ス}}①$) をとる。

別解　(iii)　$p<0$ のとき

加法定理 $\sin(\theta+\beta)=\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta$ を用いると

$$y=\sin\theta+p\cos\theta$$
$$=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta\right)$$
$$=\sqrt{1+p^2}(\cos\beta\sin\theta+\sin\beta\cos\theta)$$
$$=\sqrt{1+p^2}(\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta)$$
$$=\sqrt{1+p^2}\sin(\theta+\beta)$$

と表すことができる。ただし，β は

$$\sin\beta=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\quad -\frac{\pi}{2}<\beta<0$$

を満たすものとする。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\beta\leqq\theta+\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}+\beta$ であるから，$\sin(\theta+\beta)$ は $\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}+\beta$

すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大となる。$\sqrt{1+p^2}>0$ であるから，このとき y も最大となる。

よって，y は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ (${}^{\text{シ}}②$) で最大値 1 (${}^{\text{ス}}①$) をとる。

15

2

解答　(ア) 1　(イ) 0　(ウ) 0　(エ) 1　$\sqrt{(オ)}$ $\sqrt{5}$　(カ) 2
(キ) ⓪　(ク) ③　(ケ) 1　(コ) 2　(サ) ⓪

解説

(1) $f(0)=\dfrac{1+1}{2}={}^{ア}1$, $g(0)=\dfrac{1-1}{2}={}^{イ}0$

$2^x>0$, $2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\geqq\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=1$$

等号は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

よって，$f(x)$ は $x={}^{ウ}0$ で最小値 ${}^{エ}1$ をとる。

$g(x)=-2$ とすると　$\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-2$

分母を払うと　$2^x-2^{-x}=-4$

両辺に 2^x を掛けて整理すると　$(2^x)^2+4\cdot2^x-1=0$

$2^x>0$ であるから　$2^x=-2+\sqrt{5}$　すなわち　$2^x=\sqrt{5}-2$

よって，$g(x)=-2$ となる x の値は $\log_2(\sqrt{{}^{オ}5}-{}^{カ}2)$ である。

(2) $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}=f(x)$　(^{キ}⓪)　……①

$g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=-\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-g(x)$　(^{ク}③)　……②

$$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{4^x+2+4^{-x}}{4}-\frac{4^x-2+4^{-x}}{4}={}^{ケ}1\quad\cdots\cdots③$$

$$g(2x)=\frac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}=2\cdot\frac{2^x+2^{-x}}{2}\cdot\frac{2^x-2^{-x}}{2}={}^{コ}2f(x)g(x)\quad\cdots\cdots④$$

別解　③　$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}$
$=2^x\cdot2^{-x}={}^{ケ}1$

(3) (1) より $f(0)=1$, $g(0)=0$ であるから，太郎さんが考えた式 (A) ～ (D) に $\beta=0$ を代入すると，それぞれ次のようになる。

(A)　$f(\alpha)=g(\alpha)$　　(B)　$f(\alpha)=f(\alpha)$　　(C)　$g(\alpha)=f(\alpha)$

(D)　$g(\alpha)=-g(\alpha)$ より　$g(\alpha)=0$

$f(0)\neq g(0)$ であるから，(A), (C) はつねには成り立たないことがわかる。

また，$g(1)=\dfrac{2-2^{-1}}{2}\neq0$ であるから，$\alpha=1$, $\beta=0$ のとき (D) は成り立たない。

よって，式 (A) ～ (D) のうち，(B) 以外の 3 つは成り立たないことがわかる。(^{サ}⓪)

参考　(B) の左辺と右辺をそれぞれ計算すると，次のようになる。

$$f(\alpha+\beta)=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$$

$$f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)=\frac{2^\alpha+2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^\beta+2^{-\beta}}{2}+\frac{2^\alpha-2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^\beta-2^{-\beta}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(2^{\alpha+\beta}+2^{\alpha-\beta}+2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta})$$
$$+\frac{1}{4}(2^{\alpha+\beta}-2^{\alpha-\beta}-2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta})$$
$$=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$$

したがって，(B) はつねに成り立つ。

22

3

解答 (ア) 2　(イ) 3　(ウ) ④　(エ) c　(オ) b　(カ) c　$\dfrac{(\text{キク})}{(\text{ケ})}$ $\dfrac{-c}{b}$

(コ) 3　(サ) 3　(シ) 3　(ス) ⓪　(セ) c　(ソ) d

$\dfrac{(\text{タチ})}{(\text{ツ})}$ $\dfrac{-b}{a}$　(テ) 0　$\dfrac{(\text{トナニ})}{(\text{ヌネ})}$ $\dfrac{-2b}{3a}$

解説

(1) ①，②の2次関数のグラフと y 軸との交点の y 座標はともに3である。

①について $y'=6x+2$，②について $y'=4x+2$ であるから，$x=0$ でともに $y'=2$ となる。

よって，y 軸との交点における接線の方程式は $y={}^{ア}2x+{}^{イ}3$ である。

y 軸との交点における接線の方程式が $y=2x+3$ となる2次関数は，a を0でない実数として $y=ax^2+2x+3$ と表されるから，⓪ ～ ⑤ の2次関数のうちであてはまるものは $y=-x^2+2x+3$ (^{ウ}④) である。

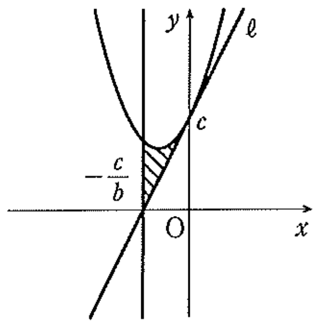
a，b，c を0でない実数とする。

曲線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点 $(0,\ {}^{エ}c)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は $y={}^{オ}bx+{}^{カ}c$ である。

$bx+c=0$ を解くと　$x=-\dfrac{c}{b}$

よって，接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\dfrac{{}^{キク}-c}{{}^{ケ}b}$ である。

a，b，c が正の実数であるとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ と接線 ℓ および直線 $x=-\dfrac{c}{b}$ で囲まれた図形の面積を S とすると



$$S=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}\{(ax^2+bx+c)-(bx+c)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}ax^2dx=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{-\frac{c}{b}}^{0}$$

$$=\frac{ac^{{}^{コ}3}}{{}^{サ}3b^{{}^{シ}3}}\quad\cdots\cdots③$$

③において，$a=1$ とし，S の値が一定となるように正の実数 b，c の値を変化させる。

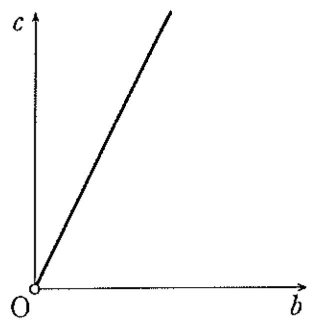
このとき，$S=\dfrac{c^3}{3b^3}$ から

$$c^3=3Sb^3$$

ゆえに　$c=\sqrt[3]{3S}\,b$

S の値が一定であるから，$\sqrt[3]{3S}$ は正の定数である。

よって，b と c の関係を表すグラフの概形は右の図のようになる。(^{ス}⓪)



(2) a，b，c，d を0でない実数とする。

曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ と y 軸との交点 $(0,\ d)$ における接線の方程式は $y={}^{セ}cx+{}^{ソ}d$ である。

次に，$g(x)=cx+d$ とし，$f(x)-g(x)$ について考える。

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと　$h(x)=ax^3+bx^2=ax^2\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$

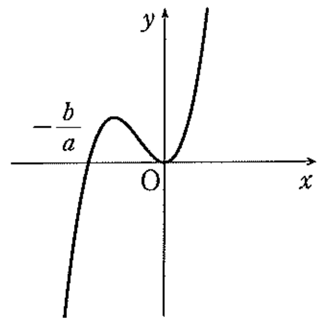
$h(x)=0$ を解くと　$x=0$ (重解)，$-\dfrac{b}{a}$

$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $h(x)=0$ の解であるから，$\dfrac{{}^{タチ}-b}{{}^{ツ}a}$ と ${}^{テ}0$ である。

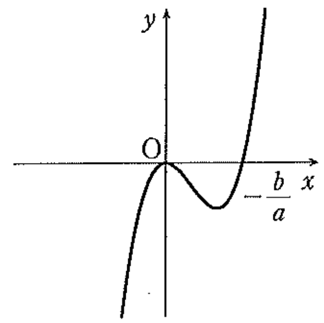
また，x が $-\dfrac{b}{a}$ と0の間を動くとき，$|f(x)-g(x)|$ すなわち $|h(x)|$ の値が最大となる x の値を求める。

a，b の正負によって，$y=h(x)$ のグラフの概形は，次の4つの場合に分けられる。

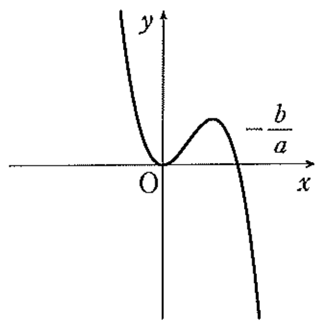
[1]　$a>0$，$b>0$ のとき



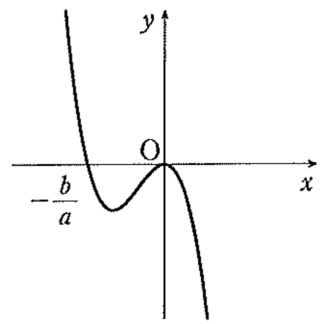
[2]　$a>0$，$b<0$ のとき



[3]　$a<0$，$b>0$ のとき



[4]　$a<0$，$b<0$ のとき



いずれの場合も $h(x)$ は $-\dfrac{b}{a}$ と0の間で極大値または極小値をとり，このとき $|h(x)|$ は最大となる。

ここで　$h'(x)=3ax^2+2bx=3ax\left(x+\dfrac{2b}{3a}\right)$

$h'(x)=0$ とすると　$x=0$，$-\dfrac{2b}{3a}$

よって，x が $-\dfrac{b}{a}$ と0の間を動くとき，$|h(x)|$ すなわち $|f(x)-g(x)|$ の値が最大と

なるのは，$x=\dfrac{{}^{トナニ}-2b}{{}^{ヌネ}3a}$ のときである。

(16) $\boxed{4}$ 各1点

解答 $\dfrac{(ア)}{(イ)}$ $\dfrac{1}{a}$ (ウ) 6 (エ) 8 (オ) 2 (カ) 8 0.(キ) 0.6

$\dfrac{(ク)}{(ケ)}$ $\dfrac{1}{6}$ (コサ) 30 (シス) 25 (セ).(ソタ) 2.40 (チ).(ツテ) 1.20

0.(トナ) 0.88 0.(ニ) 0.8 0.(ヌネ) 0.76 0.(ノハ) 0.84 (ヒ) ④

解説

(1) 箱から1枚のカードを無作為に取り出すとき，$X=2a$ となる確率は $\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}a}$

$a=5$ のとき，確率変数 X の確率分布は次の表のようになる。

X	2	4	6	8	10	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

よって，X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{5}+10\cdot\frac{1}{5}$$

$$=(2+4+6+8+10)\cdot\frac{1}{5}={}^{ウ}6$$

分散 $V(X)$ は　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=2^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{5}+6^2\cdot\frac{1}{5}+8^2\cdot\frac{1}{5}+10^2\cdot\frac{1}{5}-6^2$$

$$=(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)\cdot\frac{1}{5}-36$$

$$=44-36={}^{エ}8$$

したがって　$E(sX+t)=sE(X)+t=6s+t$

$V(sX+t)=s^2V(X)=8s^2$

$E(sX+t)=20$，$V(sX+t)=32$ より　$6s+t=20$，$8s^2=32$

$s>0$ であるから　$s={}^{オ}2$，$t={}^{カ}8$

このとき，$2X+8\geqq 20$ を解くと　$X\geqq 6$

よって，$2X+8$ が20以上である確率は

$$P(6\leqq X\leqq 10)=P(X=6)+P(X=8)+P(X=10)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=0.{}^{キ}6$$

(2) 取り出す3枚のカードをどのように選んでも，それらを横1列に並べる $3!=6$ 通りの並べ方のうち，数字が左から小さい順に並んでいる並べ方は1通りしかない。

よって，事象 A の起こる確率は　$\dfrac{{}^{ク}1}{{}^{ケ}6}$

事象 A が，ちょうど n 回起こる確率は，${}_{180}\mathrm{C}_n\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\left(\dfrac{5}{6}\right)^{180-n}$ であるから，確率変数 Y は，二項分布 $B\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。

したがって，Y の平均 m は　$m=180\cdot\dfrac{1}{6}={}^{コサ}30$

分散 σ^2 は　$\sigma^2=180\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}={}^{シス}25$

試行回数180は大きいことから，Y は近似的に正規分布 $N(30,\ 5^2)$ に従う。

ここで，$Z=\dfrac{Y-30}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって　$P(18\leqq Y\leqq 36)=P(-{}^{セ}2.{}^{ソタ}40\leqq Z\leqq {}^{チ}1.{}^{ツテ}20)$

$$=p(2.40)+p(1.20)$$

$$=0.4918+0.3849$$

$$=0.8767$$

したがって　$P(18\leqq Y\leqq 36)=0.{}^{トナ}88$

(3) 400人の有権者のうち，320人が賛成であったから，標本比率 R は

$$R=\frac{320}{400}=\frac{4}{5}=0.{}^{ニ}8$$

また，標本の大きさは，$n=400$ であるから

$$\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{400}}=0.02$$

したがって，p に対する信頼度95 % の信頼区間は

$[0.8-1.96\cdot0.02,\ 0.8+1.96\cdot0.02]$

すなわち　$[0.7608,\ 0.8392]$

よって　$0.{}^{ヌネ}76\leqq p\leqq 0.{}^{ノハ}84$

標本の大きさ n，標本比率 R の p に対する信頼度95 % の信頼区間の幅は，n が大きいとき　$2\times1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=3.92\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$

よって　$L_1=3.92\sqrt{\dfrac{0.8\times(1-0.8)}{400}}=3.92\sqrt{\dfrac{0.16}{400}}$

$$L_2=3.92\sqrt{\frac{0.6\times(1-0.6)}{400}}=3.92\sqrt{\frac{0.24}{400}}$$

$$L_3=3.92\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{500}}=3.92\sqrt{\frac{0.16}{500}}$$

したがって，$L_1<L_2$ かつ $L_3<L_1$ より　$L_3<L_1<L_2$　(^{ヒ}④)

(16) 5 答 1

解答 (ア) 2　(イ) 2　(ウ) 2　$\dfrac{(\text{エ})}{(\text{オ})}$ $\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{(\text{カ})}{n+(\text{キ})}$ $\dfrac{2}{n+3}$　(ク) 3

(ケ) 1　(コ) 2　(サ) 3　(シ) ②　$\dfrac{(\text{スセ})}{(\text{ソ})}((\text{タ})^n-1)$ $\dfrac{27}{8}(9^n-1)$

(チ)$(a_n-a_{n+1})+$(ツ) $2(a_n-a_{n+1})+1$　(テ) ⓪　(ト) 4　(ナ) ③

(ニ) 1

解説

(1) ① の漸化式に $s=4$ を代入すると　$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+4}{a_n+2}=\dfrac{2(a_n+2)}{a_n+2}=2$

すなわち　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n=2$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$

よって　$a_2={}^{\text{ア}}2$，$a_{100}={}^{\text{イ}}2$

(2) $b_1=\dfrac{1}{a_1}={}^{\text{ウ}}2$

① の漸化式に $s=0$ を代入すると　$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$　……②

$a_1=\dfrac{1}{2}>0$ であるから，② の漸化式により　$a_2>0$

同様にして　$a_3>0$

以下，同じようにして，すべての自然数 n に対して　$a_n>0$

② の漸化式の両辺について逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a_n}$

よって　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{{}^{\text{エ}}1}{{}^{\text{オ}}2}$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=2$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$b_n=2+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+3}{2}$$

$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ であるから　$a_n=\dfrac{{}^{\text{カ}}2}{n+{}^{\text{キ}}3}$

(3) $c_1=\dfrac{1+a_1}{1-a_1}=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}={}^{\text{ク}}3$

$$c_{n+1}=\frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{1+\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}}{1-\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}}=\frac{3a_n+3}{-a_n+1}=3\cdot\frac{1+a_n}{1-a_n}=3c_n$$

数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1=3$，公比 3 の等比数列であるから　$c_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

よって　$\dfrac{1+a_n}{1-a_n}=3^n$

$(3^n+1)a_n=3^n-1$

$$a_n=\frac{3^n-1}{3^n+1}=\frac{(3^n+1)-2}{3^n+1}$$

ゆえに　$a_n={}^{\text{ケ}}1-\dfrac{{}^{\text{コ}}2}{{}^{\text{サ}}3^{{}^{\text{シ}}n}+1}$ (${}^{\text{シ}}$②)

(4) $c_n=3^n$ であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_kc_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}3^k\cdot3^{k+1}=3\sum_{k=1}^{n}3^{2k}=3\sum_{k=1}^{n}9^k$

$$=3\cdot\frac{9(9^n-1)}{9-1}=\frac{{}^{\text{スセ}}27}{{}^{\text{ソ}}8}({}^{\text{タ}}9^n-1)$$

① の漸化式により　$a_{n+1}(a_n+2)=2a_n+1$ であるから

$a_na_{n+1}={}^{\text{チ}}2(a_n-a_{n+1})+{}^{\text{ツ}}1$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\{2(a_k-a_{k+1})+1\}=2\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})+n$

$=2(a_1-\cancel{a_2})+2(\cancel{a_2}-\cancel{a_3})+\cdots\cdots+2(\cancel{a_n}-a_{n+1})+n$

$=2(a_1-a_{n+1})+n=2\left\{\dfrac{1}{2}-\left(1-\dfrac{2}{3^{n+1}+1}\right)\right\}+n$

$={}^{\text{テ}}n-1+\dfrac{{}^{\text{ト}}4}{3^{{}^{\text{ナ}}n+1}+{}^{\text{ニ}}1}$ (${}^{\text{テ}}$⓪，${}^{\text{ナ}}$③)

(16)

6

解答 (ア)$\sqrt{(イ)}$ $3\sqrt{5}$ (1) (ウ)$\sqrt{(エ)}$ $3\sqrt{5}$ (1) (オ) 6 (カ) 6 (キク) -3 (2)
(ケコ) -1 (サ) 2 (2) (シ) 0 (1) (ス) 2 (1) (セ) 8 (ソ) 2 (タチ) -7 (2)
(ツ) 6 (1) (テ) 6 (1) $\sqrt{(トナ)}$ $\sqrt{85}$ (1) $\frac{(ニ)}{(ヌ)}$ $\frac{7}{6}$ (1) (ネノ) 17 (ハ) 3
(ヒフ) 20 (ヘホ) -7 (2)

解説

(1) $\overrightarrow{OP}=(0,\ 6,\ 3)$, $\overrightarrow{OQ}=(4,\ -2,\ -5)$ であるから

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{0^2+6^2+3^2}={}^{ア}3\sqrt{{}^{イ}5},\quad |\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-5)^2}={}^{ウ}3\sqrt{{}^{エ}5}$$

よって，△OPQ は OP＝OQ の二等辺三角形であるから，辺 PQ の中点を M とすると，直線 OM は ∠POQ の二等分線 ℓ に一致する。

ここで，点 M の座標は $\left(\frac{0+4}{2},\ \frac{6+(-2)}{2},\ \frac{3+(-5)}{2}\right)$

すなわち $(2,\ 2,\ -1)$

よって $\overrightarrow{OM}=(2,\ 2,\ -1)$

ゆえに $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3$

$|\overrightarrow{OA}|=9$ であるから $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OM}=3(2,\ 2,\ -1)=(6,\ 6,\ -3)$

よって，点 A の x 座標は正であり，条件を満たす。

したがって，点 A の座標は $({}^{オ}6,\ {}^{カ}6,\ {}^{キク}-3)$

(2) $\overrightarrow{OP}\perp\vec{n}$, $\overrightarrow{OQ}\perp\vec{n}$ であるベクトル $\vec{n}$ について，$\vec{n}=(2,\ a,\ b)$ とすると，$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}=0$, $\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{n}=0$ から $6a+3b=0,\ 8-2a-5b=0$

これを解いて $a=-1,\ b=2$

よって $\vec{n}=(2,\ {}^{ケコ}-1,\ {}^{サ}2)$

また，α は 3 点 O，P，Q の定める平面であるから，$\overrightarrow{OP}\perp\vec{n}$, $\overrightarrow{OQ}\perp\vec{n}$ より

$$(平面\ \alpha)\perp\vec{n}$$

ゆえに，$\overrightarrow{OH}\perp\vec{n}$ であるから $\overrightarrow{OH}\cdot\vec{n}={}^{シ}0$

ここで，$\overrightarrow{HR}=k\vec{n}$ とおくと

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OR}-k\vec{n}=(12,\ 0,\ -3)-k(2,\ -1,\ 2)=(12-2k,\ k,\ -3-2k)$$

よって $\overrightarrow{OH}\cdot\vec{n}=(12-2k)\times2+k\times(-1)+(-3-2k)\times2=18-9k$

$\overrightarrow{OH}\cdot\vec{n}=0$ から $k={}^{ス}2$

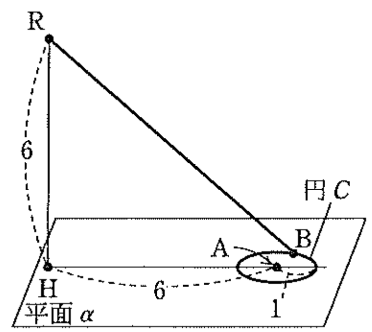
したがって，$\overrightarrow{OH}=(8,\ 2,\ -7)$ であるから，点 H の座標は $({}^{セ}8,\ {}^{ソ}2,\ {}^{タチ}-7)$

また，$\overrightarrow{HR}=2\vec{n}=(4,\ -2,\ 4)$ であるから $|\overrightarrow{HR}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}={}^{ツ}6$

(3) (1), (2) から $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OH}=(6,\ 6,\ -3)-(8,\ 2,\ -7)=(-2,\ 4,\ 4)$

よって $|\overrightarrow{HA}|=\sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}={}^{テ}6$

線分 RB の長さが最大となるのは，平面 α 上において，直線 HA と円 C の交点のうち，点 H との距離が大きい方が点 B と一致するときである。



このとき，HB＝6＋1＝7 であるから，線分 RB の長さの最大値は $\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{{}^{トナ}85}$

更に $\overrightarrow{HB}=\frac{{}^{ニ}7}{{}^{ヌ}6}\overrightarrow{HA}$

よって $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OH}+\frac{7}{6}\overrightarrow{HA}$

$$=(8,\ 2,\ -7)+\frac{7}{6}(-2,\ 4,\ 4)$$

$$=\left(\frac{{}^{ネノ}17}{{}^{ハ}3},\ \frac{{}^{ヒフ}20}{3},\ \frac{{}^{ヘホ}-7}{3}\right)$$