第１章

～　数と式　～

第１講　展開･因数分解

１　整式の加法と減法

$\boxed{1}$　整式の整理

整式は次のように整理する。

① 同類項を１つの項にまとめる。

② １つの文字に着目して，各項を次数が低くなる順に並べて整理する。このことを，降べきの順 に整理するという。

２　整式の乗法

$\boxed{1}$　指数法則　m，n は正の整数とする。

１　$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　２　$(a^m)^n = a^{mn}$　　３　$(ab)^n = a^n b^n$

$\boxed{2}$　分配法則

整式 A，B，C について　$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$

$\boxed{3}$　展開の公式

１　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

２　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　３　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

４　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$\boxed{\text{発展}}$　３次式の展開

$\boxed{1}$　３次式の展開の公式

５　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

６　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$，　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

３　因数分解

$\boxed{1}$　因数分解の公式

０　$AB+AC=A(B+C)$

１　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

２　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　３　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

４　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

$\boxed{2}$　因数分解の要領

① 共通な因数があればくくり出す。

② 因数分解の公式が利用できるように式を整理する。

- 次数の最も低い文字について，降べきの順に式を整理する。
- 適当なおき換えをしたり，項の組み合わせを考える。

③ 因数分解の公式を利用する。

$\boxed{\text{発展}}$　３次式の因数分解

$\boxed{1}$　３次式の因数分解の公式

５　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

第１講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

(1)　整式 $3x+4x^2-2-x^3$ を x について降べきの順に整理せよ。

(2)　整式 $x^2-3xy+y^3+4x-5y+1$ を x について降べきの順に整理せよ。また，y について降べきの順に整理せよ。

$\boxed{2}$ ★☆☆

次の式を展開せよ。

(1)　$(x+4)^3$

(2)　$(3a-2b)^3$

(3)　$(a+5)(a^2-5a+25)$

(4)　$(2x-7y)(4x^2+14xy+49y^2)$

(5)　$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

$\boxed{3}$ ★☆☆

次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+27

(2)　$64p^3-27q^3$

(3)　$x^3-6x^2+12x-8$

$\boxed{4}$ ★★☆

次の式を因数分解せよ。

(1)　$xy-yz+zu-ux$

(2)　$x^2y+y^2z-y^3-x^2z$

(3)　$ab-bc-a^2c+2ac^2-c^3$

$\boxed{5}$ ★★☆

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2-2xy-3y^2+6x-10y+8$

(2)　$2x^2-5xy-3y^2+7x+7y-4$

$\boxed{6}$ ★★★

次の式を因数分解せよ。

(1)　$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

(2)　$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$

$\boxed{7}$ ★★★

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^3+3xy+y^3-1$

(2)　$a^3+6ab-8b^3+1$

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

次の整式を x について降べきの順に整理せよ。また，昇べきの順に整理せよ。(3)，(4) については，y についても降べきの順に整理せよ。

(1)　$-3x^2+12x-17+10x^2-8x+9$　　(2)　$x^3-4x-2x^2-5+3x+x^2+x$

(3)　$6x^2-4y^2-2xy-3x+4y+1$　　(4)　$2y^2+3xy-x^2+2x-y+4$

$\boxed{2}$

次の式を展開せよ。

(1)　$(x+3)^3$　　(2)　$(a+2b)^3$　　(3)　$(2a-5b)^3$

(4)　$(x+4)(x^2-4x+16)$　　(5)　$(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

(6)　$(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

$\boxed{3}$

次の式を因数分解せよ。

(1)　$8a^3+27b^3$　　(2)　$64x^3-1$　　(3)　$8x^3-36x^2+54x-27$

$\boxed{4}$

次の式を因数分解せよ。

(1)　$16-8b+2ab-a^2$　　(2)　x^2y+x^2-y-1　　(3)　$x^2-2y^2+xy+yz-zx$

$\boxed{5}$

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+3xy+2y^2-6x-11y+5$　　(2)　$x^2-2xy+y^2-x+y-2$

(3)　$2x^2+5xy+2y^2+4x-y-6$　　(4)　$2x^2+5xy-3y^2-x+11y-6$

$\boxed{6}$

次の式を因数分解せよ。

(1)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$　　(2)　$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$

(3)　$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$　　(4)　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$\boxed{7}$

次の式を因数分解せよ。

(1)　$a^3-b^3-c^3-3abc$　　(2)　$x^3+y^3-3xy+1$

第１講　レベルＡ

$\boxed{1}$［函館大］

次の式を展開せよ。

(1) $(a-b+c)(a-b-c)$

(2) $(2x^2-x+1)(x^2+3x-3)$

(3) $(2a-5b)^3$

(4) $(x^3+x-3)(x^2-2x+2)$

(5) $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2)$

(6) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

(7) $(1+a)(1-a^3+a^6)(1-a+a^2)$

$\boxed{2}$

次の式を展開せよ。

(1) $(t+2)^3(t-2)^3$

(2) $(a+b)^2(a-b)^2(a^4+a^2b^2+b^4)^2$

$\boxed{3}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $2(x-1)^2-11(x-1)+15$

(2) x^2-y^2+4y-4

(3) x^4-10x^2+9

(4) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$

$\boxed{4}$

次の式を因数分解せよ。

(1) x^6-1

(2) $(x+y)^6-(x-y)^6$

(3) x^6-19x^3-216

(4) x^6-2x^3+1

$\boxed{5}$［創価大］

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x^2+x-5)(x^2+x-7)+1$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

(3) $(x+y)^4-(x-y)^4$

$\boxed{6}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3b+16-4ab-4a^2$

(2) $x^3y+x^2-xyz^2-z^2$

(3) $6x^2-yz+2xz-3xy$

(4) $3x^2-2z^2+4yz+2xy+5xz$

7

次の式を因数分解せよ。

(1) $(a+b)x^2-2ax+a-b$

(2) $a^2+(2b-3)a-(3b^2+b-2)$

(3) $3x^2-2y^2+5xy+11x+y+6$

(4) $24x^2-54y^2-14x+141y-90$

8

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3+a^2b-a(c^2+b^2)+bc^2-b^3$

(2) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

(3) $a^2b-ab^2-b^2c+bc^2-c^2a-ca^2+2abc$

第１講　レベルＢ

$\boxed{1}$ [久留米大]

$a^5-a^2b^2(a-b)-b^5$ を因数分解せよ。

$\boxed{2}$ [愛知工業大]

$ab(a+b)-2bc(b-c)+ca(2c-a)-3abc$ を因数分解せよ。

$\boxed{3}$

次の式を因数分解せよ。

(1)　$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$

(2)　$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

$\boxed{4}$ [つくば国際大]

等式 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$ を用いて，次の式を因数分解せよ。

(1)　$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$

(2)　$(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3$

$\boxed{5}$

次の式を因数分解せよ。

(1)　x^4+x^2+1

(2)　$x^4-7x^2y^2+y^4$

(3)　x^4+4

(4)　$x^4-27x^2y^2+y^4$

４　絶対値

1　数直線と絶対値

数直線上で，実数 a に対応する点と原点との距離を a の **絶対値** といい，記号 $|a|$ で表す。

$$a \geqq 0 \text{ のとき } |a| = a, \quad a < 0 \text{ のとき } |a| = -a$$

５　不等式の性質

1　不等式の性質

$A < B$ ならば　$A + C < B + C$，$A - C < B - C$

$A < B$，$C > 0$ ならば　$AC < BC$，$\dfrac{A}{C} < \dfrac{B}{C}$

$A < B$，$C < 0$ ならば　$AC > BC$，$\dfrac{A}{C} > \dfrac{B}{C}$

2　１次不等式の解き方

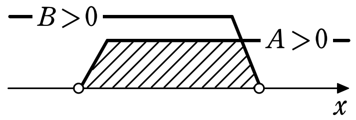
① 移項して，$ax > b$，$ax < b$，$ax \geqq b$，$ax \leqq b$ の形に整理する。

② 両辺を x の係数 a で割る。$a < 0$ のときは不等号の向きが変わるので注意する。

3　連立不等式の解き方

① 連立不等式 $\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases}$ の解は，$A > 0$ の解と $B > 0$ の解の共通範囲である。

② 不等式 $A < B < C$ は，$A < B$ と $B < C$ が同時に成り立つことを意味する。



６　絶対値を含む方程式・不等式

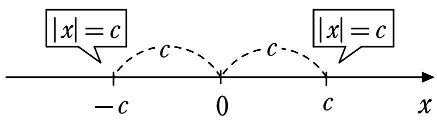
1　絶対値を含む方程式・不等式

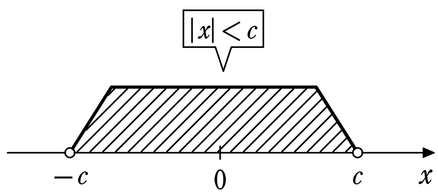
$c > 0$ のとき

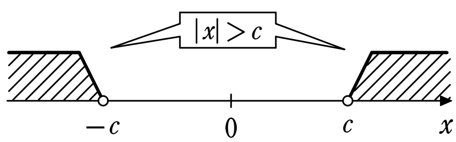
方程式 $|x| = c$ の解は　$x = \pm c$

不等式 $|x| < c$ の解は　$-c < x < c$

不等式 $|x| > c$ の解は　$x < -c$，$c < x$







第２講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の不等式を解け。

(1)　$4x+5>3x-2$　　(2)　$9-x \leqq 2x-3$　　(3)　$\dfrac{4-x}{2}>7+2x$

$\boxed{2}$ ★★☆

a を定数とする。次の方程式，不等式を解け。

(1)　$ax-6=2x-3a$　　(2)　$ax-6>2x-3a$

$\boxed{3}$ ★☆☆

次の値を求めよ。

(1)　$|-6|$　　(2)　$|2.7|$　　(3)　$\left|-\dfrac{2}{5}\right|$

(4)　$|-2|-|-6|$　　(5)　$|\pi-4|$　　(6)　$|\sqrt{3}-2|$

$\boxed{4}$ ★★☆

次の方程式を解け。

(1)　$|x-3|=1$　　(2)　$|x+5|=4$　　(3)　$|3x+1|=5$

$\boxed{5}$ ★★☆

次の不等式を解け。

(1)　$|x-3|<2$　　(2)　$|x+2| \geqq 4$　　(3)　$|2x+7| \leqq 2$

$\boxed{6}$ ★☆☆

次の式の絶対値記号をはずせ。

(1)　$|x+1|$　　(2)　$|2x-4|$　　(3)　$|x-2|+|x+4|$

$\boxed{7}$ ★★☆

次の方程式を解け。

(1)　$|x-3|=2x$　　(2)　$|x|+2|x-1|=x+3$

$\boxed{8}$ ★★★

次の不等式を解け。

(1)　$|x-4|<3x$　　(2)　$|x-1|+2|x-3| \leqq 11$

第２講　例題演習

$\boxed{1}$

次の１次不等式を解け。

(1)　$5x+16 \leqq 9x-4$　　(2)　$3(x-1) \geqq 2(5x+4)$　　(3)　$\dfrac{5x+1}{4}-\dfrac{2-3x}{3}<\dfrac{1}{6}x+1$

$\boxed{2}$

次の方程式，不等式を解け。ただし，a は定数とする。

(1)　$ax=2(x+a)$　　(2)　$ax \leqq 3$　　(3)　$ax+1>x+a^2$

$\boxed{3}$

次の値を求めよ。ただし，π は円周率である。

(1)　$\left|\dfrac{1}{3}\right|$　　(2)　$|-5+2|$　　(3)　$|2|-|-7|$

(4)　$\left|-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right|$　　(5)　$|2-\sqrt{2}|$　　(6)　$|\pi-3|+|\pi-4|$

$\boxed{4}$

次の方程式を解け。

(1)　$|x-1|=2$　　(2)　$|3x+1|=4$　　(3)　$|3-5x|=2$

$\boxed{5}$

次の不等式を解け。

(1)　$|x-2|<4$　　(2)　$|3-x| \geqq 2$　　(3)　$|3x+4|>5$

$\boxed{6}$

次の式の絶対値記号をはずせ。

(1)　$|4-x|$　　(2)　$|3x+2|$　　(3)　$|x-2|+|x+4|$

$\boxed{7}$

次の方程式を解け。

(1)　$|x+1|=3x$　　(2)　$|x-3|=-2x$　　(3)　$|2x|+|x-2|=6$

$\boxed{8}$

次の不等式を解け。

(1)　$3|x+1|<x+5$　　(2)　$|x-5| \leqq \dfrac{2}{3}|x|+1$

第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$

a は定数とする。次の方程式，不等式を解け。

(1) $a^2x+1=ax+a$　　(2) $ax>x+a^2+a-2$

$\boxed{2}$

次の不等式，連立不等式を解け。

(1) $\dfrac{2}{3}(x+1)-\dfrac{5}{6}\geqq x-\dfrac{3}{2}$　　(2) $\begin{cases}-x+5\geqq 2x-4\\ 3(2x-1)+1>4x+3\end{cases}$

(3) $|x-5|<7$　　(4) $|3x+2|>5$

$\boxed{3}$ [愛知工業大]

次の方程式を解け。

(1) $2|x+1|-|x-3|=2x$　　(2) $||x-1|-2|-3=0$

第２講　レベルＢ

$\boxed{1}$

a，b は定数とする。不等式 $ax>3x-b$ を解け。

$\boxed{2}$［金沢工業大］

k を実数の定数とする。2つの不等式

$$\begin{cases} |x-1|<6 \\ |x-k|<2 \end{cases}$$

をともに満たす実数 x が存在するような k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

次の方程式・不等式を解け。

(1)　$|x-3|+|2x-3|=9$

(2)　$||x-2|-4|=3x$

(3)　$|2x-3|\leqq|3x+2|$

(4)　$2|x+2|+|x-4|<15$

第２節　実数

４　実数

1　実数の分類

実数 $\begin{cases} \text{有理数} & \text{分数の形に表される数(整数，有限小数，循環小数)} \\ \text{無理数} & \text{分数で表すことのできない数(循環しない無限小数)} \end{cases}$

2　数直線と絶対値

数直線上で，実数 a に対応する点と原点との距離を a の **絶対値** といい，記号 $|a|$ で表す。

$$a \geqq 0 \text{ のとき } |a| = a, \quad a < 0 \text{ のとき } |a| = -a$$

５　根号を含む式の計算

1　平方根の性質

実数 a について　$\sqrt{a^2} = |a|$

$a>0$，$b>0$，$k>0$ のとき　$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$，$\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$

2　分母の有理化　a，b は正の数で，$a \fallingdotseq b$ とする。

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

発展　２重根号

1　２重根号

$a>0$，$b>0$ のとき　$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a>b>0$ のとき　$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

第３講　実数・集合

集合　$\boxed{\text{研究}}$　**３つの集合の共通部分と和集合**

$\boxed{1}$　**集合**

集合の表し方　①　{　}の中に要素を書き並べて表す。　$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

②　要素が満たすべき条件を書いて表す。$A=\{x \mid x$ は８の正の約数$\}$

$x \in A$（x は A に属する）　x が集合 A の要素である

$x \notin A$　x が集合 A の要素でない

$A \subset B$（A は B の部分集合）　集合 A のすべての要素が集合 B の要素でもある

$A=B$（A と B は等しい）　集合 A と B の要素がすべて一致している

$\varnothing$（空集合）　要素が１つもない集合

$\boxed{2}$　**共通部分と和集合**

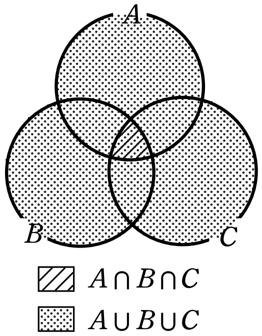
１　$A \cap B$（A と B の共通部分）　集合 A，B のどちらにも属する要素全体の集合

$A \cup B$（A と B の和集合）　集合 A，B の少なくとも一方に属する要素全体の集合

２　３つの集合の共通部分と和集合

$A \cap B \cap C$　（共通部分）　集合 A，B，C のすべてに属する要素全体の集合

$A \cup B \cup C$　（和集合）　集合 A，B，C の少なくとも１つに属する要素全体の集合



$\boxed{3}$　**補集合**

$\overline{A}$（補集合）　全体集合 U の部分集合 A に対して U の要素で A には属さない要素全体の集合

ド・モルガンの法則　１　$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$

２　$\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$

第３講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

(1)　$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$ を計算せよ。

(2)　$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

$\boxed{2}$ ★☆☆

$x=\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$x+y$　　(2)　xy　　(3)　x^2y+xy^2　　(4)　x^2+y^2　　(5)　x^3+y^3

$\boxed{3}$ ★★☆

2 重根号をはずして，次の式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt{9-2\sqrt{14}}$　　(2)　$\sqrt{11+4\sqrt{6}}$　　(3)　$\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$\boxed{4}$ ★☆☆

次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(1)　6 以下の自然数全体の集合　　(2)　3 桁の 5 の倍数全体の集合

(3)　$\{x \mid -4<x<3,\ x \text{は整数}\}$　　(4)　$\{3n-1 \mid n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots\}$

$\boxed{5}$ ★☆☆

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ を全体集合とする。U の部分集合
$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ について，次の集合を求めよ。

(1)　$\overline{A}$　　(2)　$\overline{B}$　　(3)　$\overline{A}\cap\overline{B}$

(4)　$\overline{A\cup B}$　　(5)　$A\cup\overline{B}$　　(6)　$\overline{A}\cap B$

$\boxed{6}$ ★★☆

全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ の部分集合 A，B について

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 2,\ 5,\ 8\},\ A\cap B=\{3\},\ \overline{A}\cap B=\{4,\ 7,\ 10\}$$

がわかっている。このとき，A，B，$A\cap\overline{B}$ を求めよ。

第３講　例題演習

$\boxed{1}$

次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

$\boxed{2}$

$x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$，xy　　(2) x^2+y^2　　(3) $x^4y^3+x^3y^4$　　(4) x^3+y^3

$\boxed{3}$

2 重根号をはずして，次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$　　(2) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$　　(3) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$　　(4) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$\boxed{4}$

次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(1) 15 以下の正の奇数全体の集合　　(2) 36 の正の約数全体の集合

(3) $\{x \mid -3<x<4,\ x$ は整数$\}$　　(4) $\{3n-2 \mid 1\leqq n\leqq 5,\ n$ は整数$\}$

$\boxed{5}$

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$ について，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$　　(2) $\overline{B}$

(3) $\overline{A\cap B}$　　(4) $\overline{A}\cap\overline{B}$

(5) $\overline{A}\cup B$　　(6) $A\cap\overline{B}$

$\boxed{6}$

全体集合 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ の部分集合 A，B について，$A\cup B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$，$A\cap B=\{3,\ 5\}$，$\overline{A}\cap B=\{7\}$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overline{A}\cap\overline{B}$ を求めよ。

(2) $A\cap\overline{B}$ を求めよ。

第３講　レベルＡ

$\boxed{1}$

$x=\sqrt{2}-1$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$x+\dfrac{1}{x}$　　(2)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(3)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}$　　(4)　$x^5+\dfrac{1}{x^5}$

$\boxed{2}$［東京海洋大］

次の式の２重根号をはずして簡単にせよ。

(1)　$\sqrt{11+4\sqrt{6}}$　　(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

(3)　$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$　　(4)　$\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$

$\boxed{3}$

次の各場合について，$\sqrt{x^2-4x+4}$ を x の整式で表せ。

(1)　$x \geqq 2$　　(2)　$x<2$

$\boxed{4}$

全体集合を $U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i\}$，その部分集合 A，B，C をそれぞれ $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$，$B=\{b,\ d,\ f,\ h\}$，$C=\{c,\ d,\ e,\ f\}$ とする。このとき，次の集合をそれぞれ求めよ。

(1)　$A\cup B$，$\overline{A\cup C}$，$\overline{A\cap B}$

(2)　$A\cup B\cup C$，$(A\cup C)\cap B$，$\overline{(A\cap B)\cup C}$

$\boxed{5}$

$U=\{x \mid 0<x<10,\ x$ は整数$\}$ を全体集合とする。

(1)　$P=\{x \mid x$ は３の倍数$\}$ の補集合 $\overline{P}$ を求めよ。

(2)　$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,\ 6,\ 8\}$ のとき，$A\cup B$，A，B を求めよ。

$\boxed{6}$

実数 a に対して，２つの集合を

$$A=\{a-1,\ 4,\ a^2-5a+6\},\ B=\{1,\ a^2-4,\ a^2-7a+12,\ 4\}$$

とする。$A\cap B=\{0,\ 4\}$ であるとき，a の値を求めよ。

$\boxed{7}$

実数全体を全体集合とし，$A=\{x \mid -3 \leqq x \leqq 5\}$，$B=\{x \mid |x|<4\}$，
$C=\{x \mid k-7 \leqq x < k+3\}$ (k は定数) とする。

(1)　次の集合を求めよ。

（ア）　$\overline{B}$　　（イ）　$A \cup \overline{B}$　　（ウ）　$A \cap \overline{B}$

(2)　$A \subset C$ となる k の値の範囲を求めよ。

第３講　レベルＢ

$\boxed{1}$［福島大］

$x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ のとき，$\dfrac{x^{10}-1}{x^5}$ の値を計算せよ。

$\boxed{2}$

$x=\sqrt{12+2\sqrt{35}}$，$y=\sqrt{12-2\sqrt{35}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$\boxed{3}$

$\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{x^2+4x+4}$ を x の整式で表せ。

$\boxed{4}$［防衛医科大学校］

集合 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$ とするとき，X の部分集合 A，B が，以下の 2 つの条件 (i)，(ii) を満たしているとする。このような A，B の組はいくつあるか。

(i)　$B \subset A$

(ii)　集合 B の要素の個数が，B の要素にもなっている。

$\boxed{5}$［東京国際大］

集合 U を 1 から 9 までの自然数の集合とする。U の部分集合 A，B，C について以下が成立している。

$A \cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$，$A \cup C=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$，

$B \cup C=\{1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，$A \cap B=\{4,\ 9\}$，$A \cap C=\{7\}$，$B \cap C=\{1\}$，$A \cap B \cap C=\varnothing$

(1)　集合 $\overline{B} \cap \overline{C}$ を求めよ。　　(2)　集合 $A \cap (\overline{B \cup C})$，$A$ を求めよ。

第４講　命題

１０　命題と条件　　１１　命題とその逆・対偶・裏

1　命題と条件

命題　正しい (**真**) か正しくない (**偽**) かが定まる文や式を **命題** という。

条件　文字 (x など) を含んだ文や式を (x に関する) **条件** という。
条件を考える場合には，条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく。この集合を，その条件の **全体集合** という。

2　命題 $p \Longrightarrow q$

１　命題 $p \Longrightarrow q$ は，「p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。
p を **仮定**，q を **結論** という。

２　条件 p を満たすもの全体の集合を P，条件 q を満たすもの全体の集合を Q とするとき，「命題 $p \Longrightarrow q$ が真である」と「$P \subset Q$ が成り立つ」とは同じことである。

反例　偽である命題 $p \Longrightarrow q$ において，p を満たすが q を満たさないものを **反例** という。命題が偽であることを示すには，反例を１つだけあげればよい。

3　必要条件と十分条件

２つの条件 p，q について，命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，
q は p であるための **必要条件** である，
p は q であるための **十分条件** である　　という。

同値　２つの条件 p，q について，$p \Longleftrightarrow q$ ($p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$) が成り立つとき，p と q は **同値** であるという。このとき，q は p であるための
(p は q であるための) **必要十分条件** であるという。

4　否定

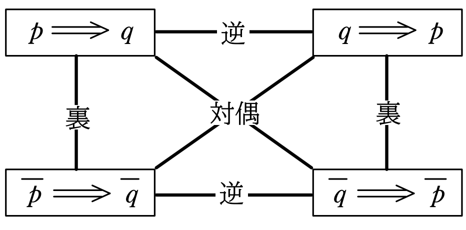
否定　条件 p に対して，「p でない」という条件を p の **否定** といい，$\overline{p}$ で表す。

「かつ」の否定，「または」の否定　条件 p，q に対して，次が成り立つ。

$$\overline{p\ \text{かつ}\ q} \Longleftrightarrow \overline{p}\ \text{または}\ \overline{q}, \qquad \overline{p\ \text{または}\ q} \Longleftrightarrow \overline{p}\ \text{かつ}\ \overline{q}$$

5　命題の逆・対偶・裏

命題 $p \Longrightarrow q$ に対して
$q \Longrightarrow p$　を　$p \Longrightarrow q$ の　**逆**
$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$　を　$p \Longrightarrow q$ の　**対偶**
$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$　を　$p \Longrightarrow q$ の　**裏**
という。



１　もとの命題が真であっても，その逆が真であるとは限らない。

２　命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する。

１２　命題と証明

1　対偶を利用する証明

命題 $p \Longrightarrow q$ を証明するのに，その対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を証明してもよい。

2　背理法を利用する証明

命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことで，もとの命題が真であると結論する。

第４講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の命題の真偽を調べよ。ただし，m，n は自然数，x，y は実数とする。

(1)　n が 8 の倍数ならば，n は 4 の倍数である。

(2)　$m+n$ が偶数ならば，m，n はともに偶数である。

(3)　xy が有理数ならば，x，y はともに有理数である。

(4)　x，y がともに有理数ならば，xy は有理数である。

$\boxed{2}$ ★☆☆

x，y は実数，m は整数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1)　$x \neq 1$ かつ $y=4$

(2)　$x \leqq 3$ または $y>7$

(3)　$-1 \leqq x < 2$

(4)　m は偶数または 3 の倍数である。

(5)　x，y はともに無理数である。

$\boxed{3}$ ★★☆

a，b，c，x は実数とする。次の $\boxed{}$ の中は，「必要条件であるが十分条件ではない」「十分条件であるが必要条件ではない」　「必要十分条件である」　「必要条件でも十分条件でもない」のうち，それぞれどれが適するか。

(1)　$x=2$ は $x^2+x-6=0$ であるための $\boxed{}$。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{PQR}$ は，$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{PQR}$ であるための $\boxed{}$。

(3)　$a=b$ は $a+c=b+c$ であるための $\boxed{}$。

(4)　$a>b$ は $a^2>b^2$ であるための $\boxed{}$。

$\boxed{4}$ ★☆☆

x，y は実数とする。次の命題の逆，対偶，裏を述べよ。また，逆，対偶の真偽を調べよ。

$$x+y=3 \Longrightarrow x=1 \text{ かつ } y=2$$

$\boxed{5}$ ★★☆

n は自然数とする。対偶を利用して，次の命題を証明せよ。

(1)　n^2+1 が奇数ならば，n は偶数である。

(2)　整数 n の平方が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数である。

$\boxed{6}$ ★★☆

$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いて，次の数が無理数であることを証明せよ。

(1)　$1+\sqrt{6}$　　　　(2)　$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

第４講　例題演習

$\boxed{1}$

次の命題の真偽を調べよ。ただし，x，y は実数，m，n は自然数とする。

(1)　$|x|=|y|$ ならば $x=y$ である

(2)　$x=2$ ならば $x^2-5x+6=0$ である

(3)　m，n がともに素数 ならば $m+n$ は偶数 である

(4)　n が 3 の倍数 ならば n は 9 の倍数 である

$\boxed{2}$

x，y は実数，m，n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1)　$x<-1$ かつ $y>0$

(2)　n は偶数 または 3 の倍数

(3)　$3\leqq x<7$

(4)　$y\leqq -1$ または $y=2$

(5)　m，n はともに 5 の倍数

(6)　m，n の少なくとも一方は偶数

$\boxed{3}$

x，y，z は実数とする。次の $\boxed{}$ 内に，必要，十分，必要十分のうち最も適するものを入れよ。また，いずれでもないものには×印をつけよ。

(1)　$x=5$ かつ $y=7$ は，$x+y=12$ であるための $\boxed{}$ 条件

(2)　$x=2$ は $x^2-4=0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(3)　$x(x-2)=0$ は $x(x+3)=0$ であるための $\boxed{}$ 条件

(4)　$x>0$ は $x>1$ であるための $\boxed{}$ 条件

(5)　$x=y$ は $x+z=y+z$ であるための $\boxed{}$ 条件

$\boxed{4}$

x，y は実数とする。次の命題の逆・対偶・裏を述べ，その真偽をいえ。

(1)　$x+y=5 \Longrightarrow x=2$ かつ $y=3$

(2)　xy が無理数ならば，x，y の少なくとも一方は無理数である。

$\boxed{5}$

m，n は整数とする。対偶を利用して，次の命題を証明せよ。

(1)　n^2 が 5 の倍数ならば，n は 5 の倍数である。

(2)　mn が 3 の倍数ならば，m，n の少なくとも一方は 3 の倍数である。

$\boxed{6}$

$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，次の数が無理数であることを証明せよ。

(1)　$4\sqrt{3}$　　(2)　$\sqrt{2}+\sqrt{6}$　　(3)　$\sqrt{3}+\sqrt{5}$

第４講　レベルＡ

$\boxed{1}$

a，b，c は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

(1)　$a=3 \implies a^2+4a-21=0$　　　　(2)　$ac=bc \implies a=b$

(3)　$a+b$，ab がともに整数ならば，a，b はともに整数である。

$\boxed{2}$

x，y，z は実数とする。次の $\boxed{}$ の中は，「必要条件であるが十分条件ではない」，「十分条件であるが必要条件ではない」，「必要十分条件である」，「必要条件でも十分条件でもない」のうち，それぞれどれが適するか。

(1)　$(x-y)(y-z)=0$ は $x=y=z$ であるための $\boxed{}$。

(2)　$xy=0$ かつ $x \neq 0$ は，$y=0$ であるための $\boxed{}$。

(3)　$x=y=0$ は，$xy=0$ かつ $x+y=0$ であるための $\boxed{}$。

(4)　$\angle \mathrm{A}<90^\circ$ は $\triangle \mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるための $\boxed{}$。

(5)　$\triangle \mathrm{ABC}$ の 3 辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c とする。
　$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$ は $\triangle \mathrm{ABC}$ が直角二等辺三角形であるための $\boxed{}$。

$\boxed{3}$

対偶を考えることにより，次の命題を証明せよ。

(1)　整数 a，b について，積 ab が 3 の倍数ならば，a または b は 3 の倍数である。

(2)　整数 m，n について，m^2+n^2 が奇数ならば積 mn は偶数である。

$\boxed{4}$

(1)　a，b が有理数，u が無理数で，$a+bu=0$ であるならば，$a=0$ かつ $b=0$ であることを証明せよ。

(2)　次の等式を満たす有理数 p，q の値を求めよ。

[1]　$(p-3)+(q+2)\sqrt{5}=0$　　　　[2]　$(1+\sqrt{5})p+(3-2\sqrt{5})q=0$

第４講　レベルＢ

$\boxed{1}$［センター本試］

三角形に関する条件 p，q，r を次のように定める。

p：3 つの内角がすべて異なる

q：直角三角形でない

r：45° の内角は 1 つもない

条件 p の否定を $\overline{p}$ で表し，同様に $\overline{q}$，$\overline{r}$ はそれぞれ条件 q，r の否定を表すものとする。

(1)　命題「$r \Longrightarrow$ (p または q)」の対偶は「$\boxed{\text{ア}} \Longrightarrow \overline{r}$」である。

$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから 1 つ選べ。

⓪　(p かつ q)　　①　($\overline{p}$ かつ $\overline{q}$)

②　($\overline{p}$ または q)　　③　($\overline{p}$ または $\overline{q}$)

(2)　次の ⓪ ～ ④ のうち，命題「(p または q) $\Longrightarrow$ r」に対する反例となっている三角形は $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ である。$\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，⓪ ～ ④ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ の解答の順序は問わない。

⓪　直角二等辺三角形　　①　内角が 30°，45°，105° の三角形

②　正三角形　　③　3 辺の長さが 3，4，5 の三角形

④　頂角が 45° の二等辺三角形

(3)　r は (p または q) であるための $\boxed{\text{エ}}$ 。

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから 1 つ選べ。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{2}$［立教大］

次の命題の真偽をいえ。真のときにはその証明を，偽のときには反例をあげよ。ただし，(2)，(3) については，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$ が無理数であることを用いてもよい。

(1)　$x^3+y^3+z^3=0$，$x+y+z=0$ のとき，x，y，z のうち少なくとも 1 つは 0 である。

(2)　x が実数であるとき，x^2+x が有理数ならば，x は有理数である。

(3)　x，y がともに無理数ならば，$x+y$，x^2+y^2 のうち少なくとも一方は無理数である。

$\boxed{3}$

(1)　n を整数とするとき，n^2 が 5 の倍数ならば，n は 5 の倍数であることを証明せよ。

(2)　$\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。