【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材②

中３甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｒ「数列」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{2\cdot4}$, $\dfrac{1}{4\cdot6}$, $\dfrac{1}{6\cdot8}$, ……

(2) $\dfrac{1}{1\cdot3}$, $\dfrac{1}{2\cdot4}$, $\dfrac{1}{3\cdot5}$, ……

$\boxed{2}$

和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$ を求めよ。

$\boxed{3}$

次の数列の和を求めよ。

$1\cdot1$, $3\cdot3$, $5\cdot3^2$, ……, $(2n-1)\cdot3^{n-1}$

$\boxed{4}$

1から順に自然数を並べて，1 | 2，3 | 4，5，6，7 | …… | …… のように1個，2個，4個，…… となるように群に分ける。ただし，第 n 群が含む数の個数は 2^{n-1} 個である。次のものを求めよ。

(1) 第4群の初めの数と終わりの数　(2) 第5群に含まれる数の総和

(3) 第 n 群に含まれる数の総和が10000を超えない最大の n

$\boxed{5}$

次の連立不等式の表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，n は自然数とする。

(1) $x\geqq0$，$y\geqq0$，$x+3y\leqq3n$

(2) $0\leqq x\leqq n$，$y\geqq x^2$，$y\leqq2x^2$

$\boxed{6}$

次の数列の和を求めよ。

$1^2\cdot n$，$2^2(n-1)$，$3^2(n-2)$，……，$(n-1)^2\cdot2$，$n^2\cdot1$

$\boxed{7}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

(1) $t=\sin\theta-\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $y=\cos\theta-\sin2\theta-\sin\theta+1$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{8}$

実数 x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$3x^2+2xy+y^2$ の最大値は ア $\boxed{}$，最小値は イ $\boxed{}$ である。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{n}{4(n+1)}$　　(2)　$\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

$\boxed{2}$

解答　$\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$

$\boxed{3}$

解答　$(n-1)\cdot 3^n+1$

$\boxed{4}$

解答　(1)　初めの数　8，終わりの数　15　　(2)　376　　(3)　7

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}(n+1)(3n+2)$ 個　　(2)　$\dfrac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6)$ 個

$\boxed{6}$

解答　$\dfrac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$　　(2)　最大値 2，最小値 $-\dfrac{1}{4}$

$\boxed{8}$

解答　(ア)　$2+\sqrt{2}$　　(イ)　$2-\sqrt{2}$

$\boxed{1}$

解説

(1)　この数列の第 k 項 a_k は

$$a_k=\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

よって，求める和を S とすると

$$S=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$$

(2)　この数列の第 k 項 a_k は　$a_k=\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

よって，求める和を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

$\boxed{2}$

解説

$$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})}$$

$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(k+2)-(k+3)}=\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2}$$

であるから，求める和は

$$(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})$$

$$=\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$$

$\boxed{3}$

解説

求める和を S とすると

$$S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\ \cdots\cdots\ +(2n-1)\cdot3^{n-1}$$

両辺に 3 を掛けると

$$3S=\qquad 1\cdot3+3\cdot3^2+\ \cdots\cdots\ +(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n$$

辺々を引くと

$$-2S=1+\ 2\cdot3+2\cdot3^2+\ \cdots\cdots\ +2\cdot3^{n-1}\qquad-(2n-1)\cdot3^n$$

$$=1+2(3+3^2+\ \cdots\cdots\ +3^{n-1})-(2n-1)\cdot3^n$$

$$=1+2\cdot\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$=1+3^n-3-(2n-1)\cdot 3^n=(2-2n)\cdot 3^n-2$$

ゆえに　$S=(n-1)\cdot 3^n+1$

4

(解説)

(1)　第 4 群の初めの数は　$1+2+2^2+1=8$

終わりの数は　$1+2+2^2+2^3=15$

(2)　第 5 群の初めの数は　$1+2+2^2+2^3+1=16$

よって，第 5 群は初項 16，公差 1，項数 $2^{5-1}=16$ の等差数列である。ゆえに，総和は

$$\frac{1}{2}\cdot 16(2\cdot 16+16-1)=376$$

(3)　第 n 群の初めの数は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}+1=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+1=2^{n-1}$

よって，第 n 群は初項 2^{n-1}，公差 1，項数 2^{n-1} の等差数列である。ゆえに，総和は

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}(2\cdot 2^{n-1}+2^{n-1}-1)=2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}-1)\ \cdots\cdots ①$$

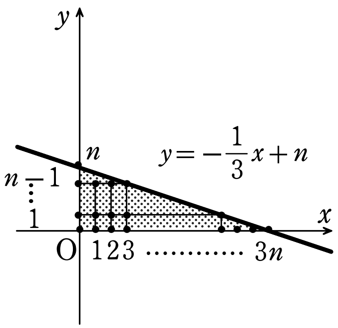
ここで，① は $n=7$ のとき 6112，$n=8$ のとき 24512

したがって，$2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}-1)<10000$ を満たす最大の n は　$n=7$

5

(解説)

(1)　領域は，右図のように，x 軸，y 軸，直線 $y=-\dfrac{1}{3}x+n$ で囲まれた三角形の周および内部である。



直線 $y=k$ $(k=n,\ n-1,\ \cdots\cdots,\ 0)$ 上には，それぞれ 1，4，7，……，$3n+1$ 個の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は

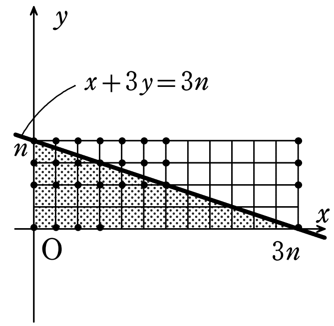
$$\sum_{k=0}^{n}(3k+1)=(3\cdot 0+1)+\sum_{k=1}^{n}(3k+1)=1+\sum_{k=1}^{n}(3k+1)$$

$$=1+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)\ (\text{個})$$

別解　線分 $x+3y=3n$ $(0\leqq y\leqq n)$ 上の格子点 $(0,\ n)$，$(3,\ n-1)$，……，$(3n,\ 0)$ の個数は　$n+1$

4 点 $(0,\ 0)$，$(3n,\ 0)$，$(3n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形の周および内部にある格子点の個数は

$$(3n+1)(n+1)$$

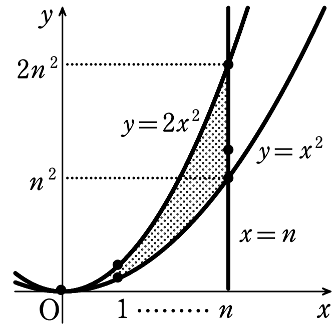


ゆえに，求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(3n+1)(n+1)+(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)\ (\text{個})$$

(2)　領域は，右図のように，直線 $x=n$，放物線 $y=x^2$，$y=2x^2$ で囲まれた部分である (境界線を含む)。



直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ n)$ 上には，それぞれ 1，2，5，……，n^2+1 個の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(k^2+1)=(0^2+1)+\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6)\ (\text{個})$$

6

(解説)

この数列の第 k 項は　$k^2\{n-(k-1)\}=(n+1)k^2-k^3$

項数は n であるから，求める和を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k^2-k^3\}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$=(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{2(2n+1)-3n\}=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

別解　求める和を S とすると

$$S=1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(2k+1)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)=\frac{1}{6}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

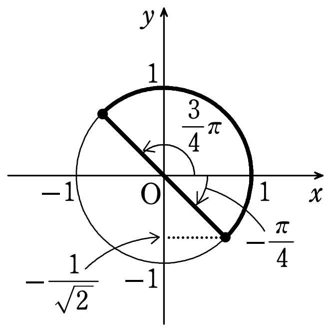
$$=\frac{1}{6}\left[2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

7

解説

(1)　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$



$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$

ゆえに　$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$

よって　$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

すなわち　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(2)　$y=\cos\theta-\sin2\theta-\sin\theta+1$

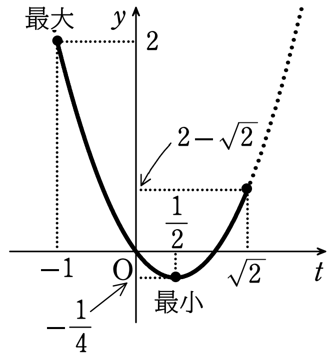
$$=\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta+1$$

$$=(\sin\theta-\cos\theta)^2-(\sin\theta-\cos\theta)$$

y を t の式で表すと

$$y=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲において，y は $t=-1$ のとき最大値 2，$t=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。



8

解説

$x^2+y^2=1$ であるから，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくことができる。

$P=3x^2+2xy+y^2$ とすると

$$P=3\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$$

$$=3\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+\sin2\theta+\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

$$=\sin2\theta+\cos2\theta+2=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2$$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{4}\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}<4\pi+\frac{\pi}{4}$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$

ゆえに　$-\sqrt{2}+2\leqq\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2\leqq\sqrt{2}+2$

よって，P の最大値は ${}^{ア}2+\sqrt{2}$，最小値は ${}^{イ}2-\sqrt{2}$ である。