【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材②

中３六甲数学

【注意事項】

本教材は

数学２「データの分析」「等式・不等式の証明」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

1

次のデータは，6 人で行ったあるゲームの得点である。ただし，a の値は正の整数である。

138，79，123，185，151，a　(単位は点)

(1)　中央値は a の値によってどのように変わるか調べよ。

(2)　a の値がわからないとき，このデータの中央値として，何通りの値がありうるか。

2

次のデータは，A 班 10 人と B 班 9 人の 7 日間の勉強時間の合計を調べたものである。

A 班　5，15，17，11，18，22，12，9，14，4

B 班　2，16，13，19，6，3，10，8，7　　(単位は時間)

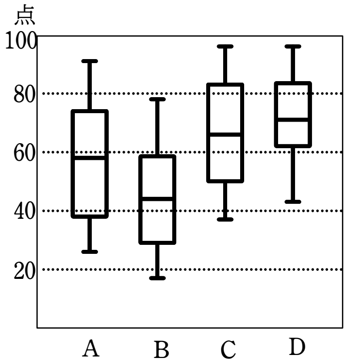
(1)　それぞれのデータの範囲を求め，それに基づいて，データの散らばりの度合いを比較せよ。

(2)　それぞれのデータの第 1 四分位数 Q_1，第 2 四分位数 Q_2，第 3 四分位数 Q_3 を求めよ。

(3)　それぞれのデータの四分位範囲，四分位偏差を求めよ。また，四分位範囲に基づいて，データの散らばりの度合いを比較せよ。

3

右の図は，ある学校で行った 4 種類のテスト A，B，C，D についての，200 人の得点を箱ひげ図に表したものである。なお，どのテストも 100 点満点である。



(1)　150 人以上が 60 点以上とれたテストはどれか。

(2)　40 点未満の生徒が 50 人以上のテストはどれか。

(3)　テスト C では，40 点以上とれた生徒は多くて何人いると考えられるか。

(4)　100 人以上の生徒が 60 点未満のテストはどれか。

(5)　テスト B では，40 点以上 60 点未満の点数の生徒は何人以上いるか。

4

大豆を 1 粒ずつ箸でつかみ 30 秒間で隣の器へ移す個数を競う大会が行われた。

以下のデータは，A ～ J の 10 選手が，30 秒間で隣の器へ移した大豆の個数 x (個) である。ただし，x のデータの平均値を $\overline{x}$ で表し，$x<25$ とする。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	22	21	16	a	13	15	24	b	12	14
$(x-\overline{x})^2$	16	9	4	c	25	9	d	4	36	16

(1)　$\overline{x}$ の値を求めよ。　　(2)　a，b，c，d の値を求めよ。

(3)　x の分散と標準偏差を求めよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ。

5

15 個の値からなるデータがあり，そのうちの 10 個の値の平均値は 9，分散は 3，残り 5 個の値の平均値は 6，分散は 9 である。この 15 個のデータの平均値と分散を求めよ。

6

(1)　次の変量 x のデータについて，次の問いに答えよ。

844，893，872，844，830，865　(単位は点)

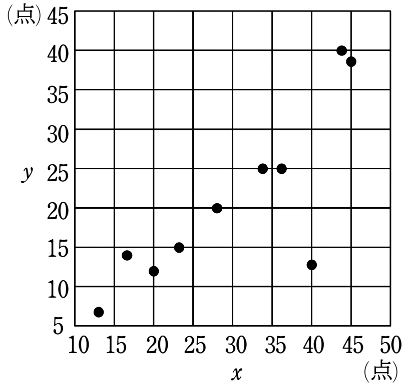
（ア）　仮平均 x_0 を 830 として，変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ。

（イ）　$u=\dfrac{x-830}{7}$ とおくことにより，変量 x のデータの標準偏差，分散を求めよ。

(2)　変量 x の平均を $\overline{x}$，標準偏差を s_x とする。$z=\dfrac{x-\overline{x}}{s_x}$ とおいて得られる新しい変量 z の平均 $\overline{z}$ と標準偏差 s_z を求めよ。

7

10 人の生徒について行った 50 点満点の漢字の「読み」と「書き取り」のテストの得点を，それぞれ変量 x，変量 y とする。右の図は，変量 x と変量 y の散布図である。



10 人の変量 x のデータは，次の通りであった。

13，17，20，23，28，34，36，40，44，45

(単位は点)

(1) 変量 x のデータの平均値と中央値を求めよ。

(2) 変量 x の値が 40 点，変量 y の値が 13 点となっている生徒の変量 y の値は誤りであることがわかり，正しい値である 32 点に修正した。修正前，修正後の変量 y のデータの中央値をそれぞれ求めよ。

(3) (2) のとき，修正前の x と y の相関係数を r_1，修正後の x と y の相関係数を r_2 とする。値の組 (r_1, r_2) として正しいものを次の ①～④ から選べ。

① $(0.82, 0.98)$　　② $(0.98, 0.82)$

③ $(-0.82, -0.98)$　　④ $(-0.98, -0.82)$

8

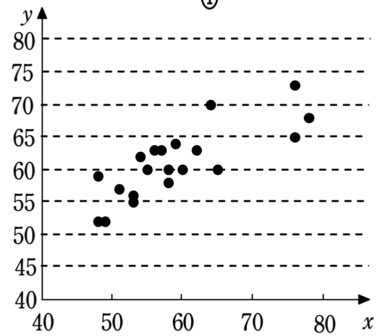
次の表は，P 高校のあるクラス 20 人について，数学と国語のテストの得点をまとめたものである。数学の得点を変量 x，国語の得点を変量 y で表し，x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ で表す。ただし，表の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていないものとする。

生徒番号	x	y	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$	$y-\overline{y}$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
1	62	63	3.0	9.0	2.0	4.0	6.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	57	63	-2.0	4.0	2.0	4.0	-4.0
合　計	A	1220	0.0	1544.0	0.0	516.0	-748.0
平　均	B	61.0	0.0	77.2	0.0	25.8	-37.4
中央値	57.5	62.0	-1.5	30.5	1.0	9.0	-14.0

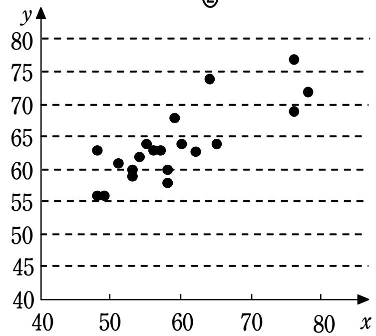
(1) A と B の値を求めよ。

(2) 変量 x と変量 y の散布図として適切なものを，相関関係，中央値に注意して次の ① ～ ④ のうちから 1 つ選べ。

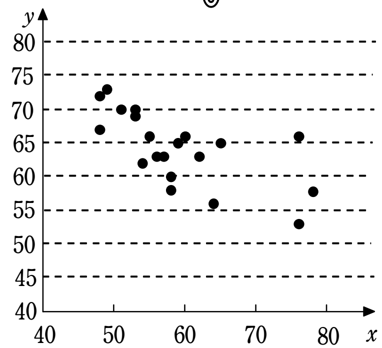
①



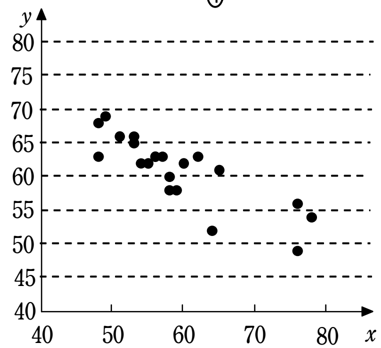
②



③



④



$\boxed{9}$

1枚のコインを8回投げたところ，裏が7回出た。この結果から，このコインは裏が出やすいと判断してよいか。仮説検定の考え方を用い，基準となる確率を0.05として考察せよ。

$\boxed{10}$

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$$

$\boxed{11}$

$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}=3$$

$\boxed{12}$

$2(ab+bc+ca)=abc$，$a+b+c=2$ のとき，a，b，c のうち少なくとも1つは2であることを示せ。

$\boxed{13}$

次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。
ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1) $x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2\geqq 0$　　(2) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

$\boxed{14}$

次の不等式を証明せよ。

(1) $2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$　（ただし，$a>0$，$b>0$ とする。）

(2) $|a|-|b|\leqq|a-b|$

$\boxed{15}$

$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x+2}$ の最小値を求めよ。

【解答&解説】

$\boxed{1}$

解答 (1) $a \leqq 123$ のとき 130.5，$124 \leqq a \leqq 150$ のとき $\dfrac{a+138}{2}$，$a \geqq 151$ のとき 144.5

(2) 29 通り

$\boxed{2}$

解答 (1) A 班：18 時間，B 班：17 時間，A 班の方が散らばりの度合いが大きい

(2) A 班のデータの Q_1 は 9 時間，Q_2 は 13 時間，Q_3 は 17 時間

B 班のデータの Q_1 は 4.5 時間，Q_2 は 8 時間，Q_3 は 14.5 時間

(3) A 班のデータの四分位範囲は 8 時間，四分位偏差は 4 時間

B 班のデータの四分位範囲は 10 時間，四分位偏差は 5 時間

B 班の方が散らばりの度合いが大きい

$\boxed{3}$

解答 (1) テスト D　(2) テスト A とテスト B　(3) 199 人

(4) テスト A とテスト B　(5) 50 人以上

$\boxed{4}$

解答 (1) $\overline{x}=18$　(2) $a=23$，$b=20$，$c=25$，$d=36$

(3) 分散 18，標準偏差 4.2 個

$\boxed{5}$

解答 平均値 8，分散 7

$\boxed{6}$

解答 (1) (ア) $\overline{x}=858$ (点)　(イ) 標準偏差 21 点，分散 441

(2) $\overline{z}=0$，$s_z=1$

$\boxed{7}$

解答 (1) 平均値 30 点，中央値 31 点　(2) 修正前 17.5 点，修正後 22.5 点

(3) ①

$\boxed{8}$

解答 (1) $A=1180$，$B=59.0$　(2) ④

$\boxed{9}$

解答 このコインは裏が出やすいと判断してよい

$\boxed{10}$

解答 略

$\boxed{11}$

解答 略

$\boxed{12}$

解答 略

$\boxed{13}$

解答 (1) 証明は略，等号成立は $x=-\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$ のとき

(2) 証明略，$ab=2$

$\boxed{14}$

解答 (1) 略　(2) 略

$\boxed{15}$

解答 $x=1$ で最小値 4

$\boxed{1}$

解説

データの大きさが 6 であるから，中央値は，小さい方から 3 番目と 4 番目の値の平均値である。

a 以外の値を小さい順に並べると　79，123，138，151，185

(1) [1] $a \leqq 123$ のとき

小さい方から 3 番目の値が 123，4 番目の値が 138 となる。

この場合の中央値は　$\dfrac{123+138}{2}=130.5$

[2] $124 \leqq a \leqq 150$ のとき

a と 138 が小さい方から 3 番目，4 番目の値となる。

この場合の中央値は　$\dfrac{a+138}{2}$

[3]　$a \geqq 151$ のとき

小さい方から 3 番目の値が 138，4 番目の値が 151 となる。

この場合の中央値は　$\dfrac{138+151}{2}=144.5$

(2)　$124 \leqq a \leqq 150$ のとき，a のとりうる値は　$150-124+1=27$ (通り)

$a \leqq 123$，$a \geqq 151$ の場合と合わせて　$27+2=29$ (通り)

参考　(2)　(1) の結果は，$\dfrac{x+138}{2}$ (x は整数，$123 \leqq x \leqq 151$) とまとめることができる。

よって，中央値は $151-123+1=29$ (通り) の値がありうる，と答えてもよい。

2

解説

(1)　A 班のデータの範囲は　$22-4=18$ (時間)

B 班のデータの範囲は　$19-2=17$ (時間)

A 班の方が範囲が大きいから，A 班の方が散らばりの度合いが大きいと考えられる。

(2)　A 班のデータを小さい順に並べ替えると

4，5，9，11，12，14，15，17，18，22

よって

$Q_2=\dfrac{12+14}{2}=13$ (時間)，$Q_1=9$ (時間)，$Q_3=17$ (時間)

B 班のデータを小さい順に並べ替えると

2，3，6，7，8，10，13，16，19

ゆえに

$Q_2=8$ (時間)，$Q_1=\dfrac{3+6}{2}=4.5$ (時間)，$Q_3=\dfrac{13+16}{2}=14.5$ (時間)

(3)　A 班のデータの四分位範囲は $Q_3-Q_1=8$ (時間)，四分位偏差は　$\dfrac{8}{2}=4$ (時間)

B 班のデータの四分位範囲は $Q_3-Q_1=10$ (時間)，四分位偏差は　$\dfrac{10}{2}=5$ (時間)

B 班の方が四分位範囲が大きいから，B 班の方が散らばりの度合いが大きいと考えられる。

3

解説

(1)　第 1 四分位数が 60 点以上のテストは D だけである。

よって　テスト D

(2)　第 1 四分位数が 40 点未満のテストは，A と B だけである。

よって　テスト A とテスト B

(3)　テスト C では，最小値が 40 点未満，第 1 四分位数が 40 点以上であるから，40 点以上とれた生徒は最も多くて，199 人いると考えられる。

よって　199 人

(4)　中央値が 60 点未満のテストは，A と B だけである。

よって　テスト A とテスト B

(5)　テスト B では，第 2 四分位数 (中央値) が 40 点以上で第 3 四分位数が 60 点未満であるから，40 点以上 60 点未満の中に少なくとも全体の $\dfrac{1}{4}$ はいることになる。

よって　50 人以上

4

解説

(1)　A のデータに着目すると

$x=22$，$(x-\overline{x})^2=16$ から　$(22-\overline{x})^2=16$

よって　$22-\overline{x}=\pm 4$

ゆえに　$\overline{x}=18$，26　……①

B のデータに着目すると

$x=21$，$(x-\overline{x})^2=9$ から　$(21-\overline{x})^2=9$

よって　$21-\overline{x}=\pm 3$

ゆえに　$\overline{x}=18$，24　……②

①，② から　$\overline{x}=18$ (個)

別解　① と $x<25$ から　$\overline{x}=18$ (個)

(2)　G のデータに着目すると　$d=(24-18)^2=36$

x のデータの総和は　$18\times 10=180$

よって　$22+21+16+a+13+15+24+b+12+14=180$

ゆえに　$a=43-b$　……③

H のデータに着目すると

$(b-18)^2=4$ から　$b-18=\pm 2$

よって　$b=16,\ 20$

$b=16$ のとき，③ から $a=27$ となり，$x<25$ に適さない。

$b=20$ のとき，③ から $a=23$ となり，$x<25$ に適する。

よって　$a=23,\ b=20$

ゆえに　$c=(23-18)^2=25$

したがって　$a=23,\ b=20,\ c=25,\ d=36$

(3)　偏差の 2 乗の和は

$$16+9+4+25+25+9+36+4+36+16=180$$

よって，分散は　$\dfrac{1}{10}\times 180=18$

ゆえに，標準偏差は　$\sqrt{18}=3\sqrt{2}\fallingdotseq 4.2$ (個)

5

解説

15 個のデータの平均値は　$\dfrac{1}{15}(9\times 10+6\times 5)=\dfrac{120}{15}=8$

10 個の値の 2 乗の平均値を a とすると

$a-9^2=3$　よって　$a=84$

残りの 5 個の値の 2 乗の平均値を b とすると

$b-6^2=9$　よって　$b=45$

よって，15 個の値の 2 乗の和は

$$a\times 10+b\times 5=84\times 10+45\times 5=1065$$

したがって，15 個のデータの分散は　$\dfrac{1065}{15}-8^2=71-64=7$

6

解説

(1)　(ア)　変量 x のデータの各値と仮平均 $x_0=830$ との差を表にすると，右のようになる。

x	844	893	872	844	830	865	計
$x-x_0$	14	63	42	14	0	35	y

$x-x_0$ の合計 y の値は

$$y=14+63+42+14+0+35=168 \text{ (点)}$$

よって　$\overline{x}=830+\dfrac{168}{6}=858$ (点)

(イ)　$u=\dfrac{x-830}{7}$ とおくと，u，u^2 の値は右のようになる。

x	844	893	872	844	830	865	計
u	2	9	6	2	0	5	24
u^2	4	81	36	4	0	25	150

u のデータの分散は

$$\overline{u^2}-(\overline{u})^2=\frac{150}{6}-\left(\frac{24}{6}\right)^2=9$$

であるから，u のデータの標準偏差は　$\sqrt{9}=3$

よって，x のデータの標準偏差は　$3\times 7=21$ (点)，分散は　$21^2=441$

(2)　$z=\dfrac{1}{s_x}x-\dfrac{\overline{x}}{s_x}$ から　$\overline{z}=\dfrac{\overline{x}-\overline{x}}{s_x}=0$，$s_z=\left|\dfrac{1}{s_x}\right|s_x=1$

7

解説

(1)　変量 x のデータの平均値は

$$\frac{1}{10}(13+17+20+23+28+34+36+40+44+45)=\frac{300}{10}=30 \text{ (点)}$$

変量 x のデータの中央値は　$\dfrac{1}{2}(28+34)=31$ (点)

(2)　修正前の変量 y のデータの小さい方から 5，6 番目の値が，それぞれ 15，20 であるから，中央値は　$\dfrac{1}{2}(15+20)=17.5$ (点)

修正後の変量 y のデータの小さい方から 5，6 番目の値が，それぞれ 20，25 であるか

ら，中央値は　$\frac{1}{2}(20+25)=22.5$（点）

(3)　修正前，修正後とも，散布図から正の相関関係があることがわかる。

よって　$r_1>0$，$r_2>0$

また，修正後の方が，散布図が右上がりの直線に沿って分布する傾向がより強くなる。

よって　$r_1<r_2$

これらを満たす $(r_1,\ r_2)$ の組は　①

$\boxed{8}$

解説

(1)　生徒番号 1 の生徒について，表から

$x=62$，　$x-\overline{x}=3.0$

よって　$62-\overline{x}=3.0$　　ゆえに　$B=59.0$

よって　$A=59.0\times20=1180$

(2)　表から，相関係数 r は　$r=\dfrac{-37.4}{\sqrt{77.2\times25.8}}<0$

ゆえに，散布図の点は右下がりに分布するから，③，④ のどちらかである。

このうち，x の中央値が 57.5 で，y の中央値が 62.0 のものは　④

$\boxed{9}$

解説

仮説 H_1：このコインは裏が出やすい

と判断してよいかを考察するために，次の仮説を立てる。

仮説 H_0：このコインは公正である

仮説 H_0 のもとで，コインを 8 回投げて，裏が 7 回以上出る確率は

$${}_8\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0+{}_8\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2^8}(1+8)=\frac{9}{256}=0.035\cdots\cdots$$

これは 0.05 より小さいから，仮説 H_0 は正しくなかったと考えられ，仮説 H_1 は正しいと判断してよい。

したがって，このコインは裏が出やすいと判断してよい。

$\boxed{10}$

解説

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ とおくと　$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$

よって　$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(a^2+b^2+c^2)k^2}{a^2+b^2+c^2}=k^2$$

$$\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}=\frac{ak\cdot bk+bk\cdot ck+ck\cdot ak}{ab+bc+ca}=\frac{abk^2+bck^2+cak^2}{ab+bc+ca}$$

$$=\frac{(ab+bc+ca)k^2}{ab+bc+ca}=k^2$$

したがって　$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$$

$\boxed{11}$

解説

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$$(\text{左辺})=\frac{a^2}{(a+b)(-b)}+\frac{b^2}{(-a)(b+a)}+\frac{(a+b)^2}{(-b)(-a)}$$

$$=\frac{-a^3-b^3+(a+b)^3}{ab(a+b)}=\frac{3a^2b+3ab^2}{ab(a+b)}=\frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)}=3$$

したがって，等式は証明された。

別解　$a+b+c=0$ より，

$a+b=-c$，$a+c=-b$，$b+c=-a$ であるから

$$(\text{左辺})=\frac{a^2}{(-c)(-b)}+\frac{b^2}{(-a)(-c)}+\frac{c^2}{(-b)(-a)}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc+3abc}{abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$$

$$=\frac{3abc}{abc}=3$$

したがって，等式は証明された。

$\boxed{12}$

(解説)

$$(a-2)(b-2)(c-2)=\{ab-2(a+b)+4\}(c-2)$$
$$=abc-2ab-2(a+b)c+4(a+b)+4c-8$$
$$=abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8$$
$$=abc-abc+4\cdot 2-8=0$$

よって　$a-2=0$　または　$b-2=0$　または　$c-2=0$

したがって，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 2 である。

$\boxed{13}$

(解説)

(1)　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2=x^2+2(1-y)x+5y^2+2y+2$

$$=\{x^2+2(1-y)x+(1-y)^2\}-(1-y)^2+5y^2+2y+2$$
$$=\{x+(1-y)\}^2+4y^2+4y+1$$
$$=(x-y+1)^2+(2y+1)^2 \geqq 0$$

等号が成り立つのは，$x-y+1=0$ かつ $2y+1=0$ すなわち

$x=-\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$ のときである。

(2)　(左辺)$=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$$ab+\frac{4}{ab} \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}=2\cdot 2=4$$

よって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+\dfrac{4}{ab}+5 \geqq 4+5=9$

等号が成り立つのは　$ab=\dfrac{4}{ab}$　すなわち　$ab=2$ のとき。

$\boxed{14}$

(解説)

(1)　両辺の平方の差を考えると

$$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{4a+b})^2=(4a+4\sqrt{ab}+b)-(4a+b)$$
$$=4\sqrt{ab}>0$$

よって　$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{4a+b})^2$

$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{4a+b}>0$ であるから　$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$

(2)　[1]　$|a|-|b|<0$　すなわち　$|a|<|b|$ のとき

(左辺)<0，(右辺)>0 であるから不等式は成り立つ。

[2]　$|a|-|b| \geqq 0$　すなわち　$|a| \geqq |b|$ のとき

$$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2=(a-b)^2-(a^2-2|ab|+b^2)$$
$$=2(-ab+|ab|) \geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

よって　$(|a|-|b|)^2 \leqq |a-b|^2$

$|a|-|b| \geqq 0$，$|a-b| \geqq 0$ であるから

$$|a|-|b| \leqq |a-b|$$

$\boxed{15}$

(解説)

$x+\dfrac{9}{x+2}=x+2+\dfrac{9}{x+2}-2$

$x>0$ より $x+2>0$，$\dfrac{9}{x+2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+2+\frac{9}{x+2} \geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{9}{x+2}}=2\cdot 3=6$$

ゆえに　$x+\dfrac{9}{x+2} \geqq 4$

等号が成り立つのは，$x+2=\dfrac{9}{x+2}$ のときである。

このとき　$(x+2)^2=9$

$x+2>0$ であるから　$x+2=3$

ゆえに　$x=1$

したがって　$x=1$ で最小値 4