$\boxed{1}$

解説

(1)　$\vec{a}\perp\vec{b}$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=x^2+y^2,$$

$$|\vec{a}+3\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=x^2+9y^2,$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2=x^2+3y^2$$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+3\vec{b}|}=\dfrac{x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+9y^2}}$　……①

よって　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{(x^2+3y^2)^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}$

$$=\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}$$

(2)　$x>0$，$y>0$ と①から　　$\cos\theta>0$

ゆえに　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\sin^2\theta$ が最大値をとるとき，θ は最大値をとる。

(1)の結果から　$\sin^2\theta=\dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}=\dfrac{4\times\dfrac{y^2}{x^2}}{\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(1+9\times\dfrac{y^2}{x^2}\right)}$

ここで，$\dfrac{y^2}{x^2}=t$ とおくと

$$\sin^2\theta=\frac{4t}{(1+t)(1+9t)}=\frac{4t}{9t^2+10t+1}=\frac{4}{9t+10+\dfrac{1}{t}}$$

$x>0$，$y>0$ より $t>0$，$\dfrac{1}{t}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{4}{9t+10+\dfrac{1}{t}}\leqq\frac{4}{2\sqrt{9t\times\dfrac{1}{t}}+10}=\frac{1}{4}$$

$t>0$ より，等号が成り立つのは，$9t=\dfrac{1}{t}$ すなわち $t=\dfrac{1}{3}$ のときである。

よって，$\sin^2\theta$ は $t=\dfrac{1}{3}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

このとき，$\sin\theta>0$ であるから　　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

したがって，θ の最大値は　　$\dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$a^x=b^y=(ab)^z$　…… ① とする。

$1<a<b$ であるから，① の各辺は正の数である。

よって，① の各辺の常用対数をとって

$$\log_{10}a^x=\log_{10}b^y=\log_{10}(ab)^z=k$$

とおくと　　$x\log_{10}a=y\log_{10}b=z(\log_{10}a+\log_{10}b)=k$

ゆえに　　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{\log_{10}a}{k}$，$\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log_{10}b}{k}$，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\log_{10}a+\log_{10}b}{k}$

したがって，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ は成り立つ。

注意　対数の底は 1 でない正の数なら何でもよい。

(2)　$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$ から　$pn+pm=mn$

よって　　$(m-p)(n-p)=p^2$　…… ①

m，n は $m>n$ を満たす自然数であるから　　$m-p>n-p>-p$

また，p は素数であるから，①より　　$m-p=p^2$，$n-p=1$

したがって　　$m=p^2+p$，$n=p+1$

(3)　m，n は自然数，p は素数であるから，m，n，p は 0 でない実数である。

よって，(1) から $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$ が成り立つ。

また，$a^m=b^n$ において，$1<a<b$ であるから

$$a^m=b^n>a^n　　すなわち　　a^m>a^n$$

底 a は 1 より大きいから　　$m>n$

ゆえに，(2) より $m=p^2+p$，$n=p+1$ となるから　　$a^{p^2+p}=b^{p+1}=(ab)^p$

$b^{p+1}=(ab)^p$ から　　$b^{p+1}=a^pb^p$

$b^p>0$ であるから，両辺を b^p で割ると　　$b=a^p$

これは，$a^{p^2+p}=b^{p+1}$ を満たす。

したがって　　$b=a^p$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　さいころを n 回投げた時点でゲームが終了するのは次の場合である。

[1]　n 回連続で 1，2，3 のいずれかの目が出る

[2]　n 回連続で 4 または 5 の目が出る

[1] が起きる確率は　$\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

[2] が起きる確率は　$\left(\frac{2}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

[1]，[2] は互いに排反であるから　$P(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(2)　さいころを $n+1$ 回投げた時点でゲームが終了するのは次の場合である。

[1]　さいころを n 回投げた時点で Q の座標が $n-1$ で，$n+1$ 回目に 1，2，3 のいずれかの目が出る

[2]　さいころを n 回投げた時点で Q の座標が $-(n-1)$ で，$n+1$ 回目に4 または 5 の目が出る

[1] のとき

1 回目から n 回目までに 6 の目がちょうど 1 回，1，2，3 のいずれかの目が $n-1$ 回出て，かつ $n+1$ 回目に 1，2，3 のいずれかの目が出る場合であるから，その確率は

$${}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

[2] のとき

1 回目から n 回目までに 6 の目がちょうど 1 回，4 または 5 の目が $n-1$ 回出て，かつ $n+1$ 回目に 4 または 5 の目が出る場合であるから，その確率は

$${}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{n}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

[1]，[2] は互いに排反であるから

$$P(n+1)=\frac{n}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{n}{6}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

(3)　さいころを $n+2$ 回投げた時点でゲームが終了するのは次の場合である。

[1]　1 回目から n 回目までに 4 または 5 の目がちょうど 1 回，1，2，3 のいずれかの目が $n-1$ 回出て，$n+1$ 回目，$n+2$ 回目にいずれも 1，2，3 のいずれかの目が出る

[2]　1 回目から $n+1$ 回目までに 6 の目がちょうど 2 回，1，2，3 のいずれかの目が $n-1$ 回出て，$n+2$ 回目に 1，2，3 のいずれかの目が出る

[3]　1 回目から n 回目までに 1，2，3 のいずれかの目がちょうど 1 回，4 または 5

のいずれかの目が $n-1$ 回出て，$n+1$ 回目， $n+2$ 回目にいずれも 4 または 5 の目が出る

[4]　1 回目から $n+1$ 回目までに 6 の目がちょうど 2 回，4 または 5 のいずれかの目が $n-1$ 回出て， $n+2$ 回目に 4 または 5 の目が出る

[1] が起きる確率は　　$${}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

[2] が起きる確率は　　$${}_{n+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n(n+1)}{72}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

[3] が起きる確率は　　$${}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

[4] が起きる確率は　　$${}_{n+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}=\frac{n(n+1)}{72}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

[1] ～ [4] は互いに排反であるから

$$\begin{aligned}P(n+2)&=\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{n(n+1)}{72}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\frac{n(n+1)}{72}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\\&=\left\{\frac{n}{6}+\frac{n(n+1)}{72}\right\}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}\\&=\frac{n(n+13)}{72}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}\end{aligned}$$