1

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ -4,\ 5)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 2,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p,\ q,\ 4)$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 6,\ -6),\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ -1,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるとき　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

よって　　$6q-24=0$，$p-q=0$

これを解いて　　$p=4$，$q=4$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるとき　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$

よって　　$p-4q+20=0$　……①

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=1^2+2^2+(-1)^2=6$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p+2q-4$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+x\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2x^2+2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})x+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=6x^2+2(p+2q-4)x+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=6\left(x^2+\frac{p+2q-4}{3}x\right)+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=6\left(x+\frac{p+2q-4}{6}\right)^2-\frac{(p+2q-4)^2}{6}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+x\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\geqq 0$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+x\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$ が最小となるとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+x\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ も最小になる。

よって，$x=-2$ は $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+x\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$ が最小となるときの x の値であるから

$$-\frac{p+2q-4}{6}=-2\quad\cdots\cdots②$$

①，② を解いて　　$p=4$，$q=6$

(3)　$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=(1,\ -4,\ 5)+s(0,\ 6,\ -6)+t(1,\ -1,\ 0)\\&=(t+1,\ 6s-t-4,\ -6s+5)\end{aligned}$$

よって　　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$

$$\begin{aligned}&=(t+1)^2+(6s-t-4)^2+(-6s+5)^2\\&=72s^2-12st+2t^2-108s+10t+42\\&=2\{t^2-(6s-5)t\}+72s^2-108s+42\\&=2\left(t-\frac{6s-5}{2}\right)^2-2\left(\frac{6s-5}{2}\right)^2+72s^2-108s+42\\&=2\left(t-\frac{6s-5}{2}\right)^2+54s^2-78s+\frac{59}{2}\end{aligned}$$

$$=2\left(t-\frac{6s-5}{2}\right)^2+54\left(s^2-\frac{13}{9}s\right)+\frac{59}{2}$$

$$=2\left(t-\frac{6s-5}{2}\right)^2+54\left(s-\frac{13}{18}\right)^2+\frac{4}{3}$$

ゆえに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2$ は　$t-\frac{6s-5}{2}=0$ かつ $s-\frac{13}{18}=0$

すなわち，$s=\frac{13}{18}$，$t=-\frac{1}{3}$ のとき最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\geqq 0$ であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2$ が最小となるとき，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ も最小となる。

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ は，$s=\frac{13}{18}$，$t=-\frac{1}{3}$ のとき最小値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ をとる。

2

解説

(1)　$a_2=\frac{a_1}{2}+\frac{3}{a_1}=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

$a_3=\frac{a_2}{2}+\frac{3}{a_2}=\frac{5}{4}+\frac{6}{5}=\frac{49}{20}$

(2)　$a_n>\sqrt{6}$　…… ① とおく。

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=3>\sqrt{6}$ より，$n=1$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると　$a_k>\sqrt{6}$

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると

$$a_{k+1}-\sqrt{6}=\frac{a_k}{2}+\frac{3}{a_k}-\sqrt{6}=\frac{a_k{}^2-2\sqrt{6}\,a_k+6}{2a_k}=\frac{(a_k-\sqrt{6})^2}{2a_k}$$

$a_k>\sqrt{6}$ より，$\frac{(a_k-\sqrt{6})^2}{2a_k}>0$ であるから

$a_{k+1}-\sqrt{6}>0$　すなわち　$a_{k+1}>\sqrt{6}$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(3)　(2) [2] から　$a_{n+1}-\sqrt{6}=\frac{(a_n-\sqrt{6})^2}{2a_n}$

また，$a_n>\sqrt{6}>2$ から　$\frac{(a_n-\sqrt{6})^2}{2a_n}<\frac{(a_n-\sqrt{6})^2}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}(a_n-\sqrt{6})^2$

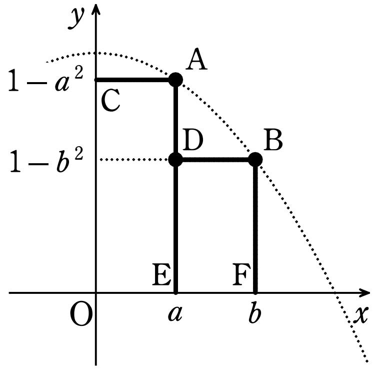
したがって　$a_{n+1}-\sqrt{6}<\frac{1}{4}(a_n-\sqrt{6})^2$

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $S=a\cdot(1-a^2)+(b-a)\cdot(1-b^2)$

$=-a^3+b^2a-b^3+b$



(2) $f(a)=-a^3+b^2a-b^3+b$ とする。

$f'(a)=-3a^2+b^2$

$=-(\sqrt{3}a+b)(\sqrt{3}a-b)$

$f'(a)=0$ とすると　　$a=\pm\dfrac{b}{\sqrt{3}}$

よって，$0\leqq a<b$ の範囲における，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{b}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	b
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	極大	↘	

ゆえに，S は $a=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ のとき最大値をとる。

(3) (2) の結果から，$a=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ のとき

$$S=-\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^3+b^2\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)-b^3+b=\frac{2\sqrt{3}-9}{9}b^3+b$$

$g(b)=\dfrac{2\sqrt{3}-9}{9}b^3+b$ とおくと，S の最大値は，$0<b\leqq 1$ の範囲における $g(b)$ の最大値に一致する。

$\alpha=\dfrac{9-2\sqrt{3}}{9}$ (>0) とおくと　　$g'(b)=-3\alpha b^2+1=-(\sqrt{3\alpha}\cdot b+1)(\sqrt{3\alpha}\cdot b-1)$

$g'(b)=0$ とすると　　$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3\alpha}}$

ここで　　$3\alpha=\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{9-\sqrt{12}}{3}>\dfrac{9-4}{3}=\dfrac{5}{3}>1$

ゆえに，$0<\dfrac{1}{3\alpha}<1$ であるから　　$0<\dfrac{1}{\sqrt{3\alpha}}<1$

よって，$0<b\leqq 1$ の範囲で $g'(b)=0$ を満たす b の値は　　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3\alpha}}$

したがって，$0<b\leqq 1$ における，$g(b)$ の増減表は右のようになる。

b	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3\alpha}}$	$\cdots$	1
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$		↗	極大	↘	

よって，$g(b)$ は $b=\dfrac{1}{\sqrt{3\alpha}}$ のとき最大値をとる。

ゆえに，M の値は

$$M=g\left(\frac{1}{\sqrt{3\alpha}}\right)=-\alpha\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3\alpha}}\right)^3+\frac{1}{\sqrt{3\alpha}}=\frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}$$

よって，求める M^2 の値は

$$M^2=\frac{4}{27\alpha}=\frac{4}{3(9-2\sqrt{3})}=\frac{36+8\sqrt{3}}{207}$$

また　$$\frac{1}{4}-M^2=\frac{1}{4}-\frac{36+8\sqrt{3}}{207}=\frac{63-32\sqrt{3}}{828}>\frac{63-32\times1.8}{828}$$

$$=\frac{63-57.6}{828}>0$$

ゆえに　$M^2<\dfrac{1}{4}$

$\alpha>0$ であるから　$M>0$　　　よって　$M<\dfrac{1}{2}$

M は S の最大値であるから，$S<\dfrac{1}{2}$ である。