1

(解説)

(1)　点 $(2,\ \sqrt{2})$ が領域 A の点であるための条件は

$$s^2+t^2 \leqq 6,\ s+t=2,\ st=\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす実数 s，t が存在することである。

$s+t=2$，$st=\sqrt{2}$ から，s，t は u の 2 次方程式 $u^2-2u+\sqrt{2}=0$　……② の 2 つの解である。

② の判別式を D とおくと　　$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}<0$

よって，② は実数解をもたない。

ゆえに，① を満たす実数 s，t は存在しない。

したがって，$(2,\ \sqrt{2})$ は領域 A の点でない。

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 A の点であるための条件は

$$s^2+t^2 \leqq 6,\ s+t=x,\ st=y$$

を満たす実数 s，t が存在することである。

$s^2+t^2 \leqq 6$ から　　$(s+t)^2-2st \leqq 6$

$s+t=x$，$st=y$ を代入して　　$x^2-2y \leqq 6$

すなわち　　$y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-3$　……③

$s+t=x$，$st=y$ から，s，t は u の 2 次方程式 $u^2-xu+y=0$ の 2 つの解である。

この方程式の判別式を D とすると　　$D=x^2-4y$

s，t が実数であるとき，$D \geqq 0$ であるから　　$x^2-4y \geqq 0$

すなわち　　$y \leqq \dfrac{1}{4}x^2$　……④

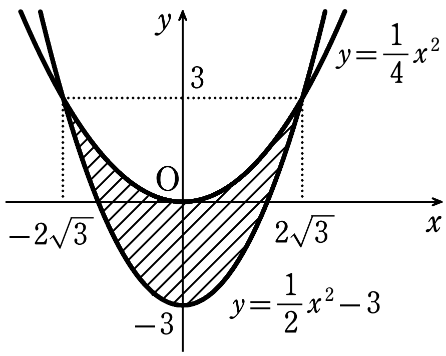
③，④ から，領域 A 上の点 $(x,\ y)$ が満たす

不等式は　$\begin{cases} y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-3 \\ y \leqq \dfrac{1}{4}x^2 \end{cases}$

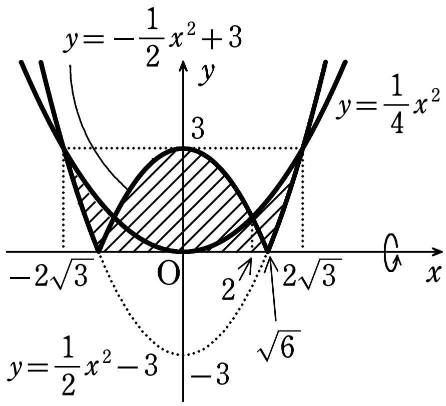
$\dfrac{1}{2}x^2-3=\dfrac{1}{4}x^2$ とすると　　$x=\pm 2\sqrt{3}$

よって，領域 A は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(3)　放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-3$ の x 軸より下側の部分を，x 軸に関して対称に折り返すと右の図のようになり，求める回転体の体積は，右の図の斜線部分を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積である。



このとき，折り返してできる放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ と放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ の交点の x 座標は，$-\frac{1}{2}x^2+3=\frac{1}{4}x^2$ を解いて　　$x=\pm 2$

領域 A は y 軸に関して対称であるから，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V&=2\left\{\pi\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+3\right)^2dx+\pi\int_2^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2dx-\pi\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^2dx\right\}\\
&=2\pi\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx+2\pi\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{1}{16}x^4\,dx-2\pi\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx\\
&=2\pi\left[\frac{1}{20}x^5-x^3+9x\right]_0^2+2\pi\left[\frac{1}{80}x^5\right]_2^{2\sqrt{3}}-2\pi\left[\frac{1}{20}x^5-x^3+9x\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\\
&=\frac{112-48\sqrt{3}+48\sqrt{6}}{5}\pi
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$0 \leqq x \leqq \pi$　…… ①，$0 \leqq y \leqq \pi$　…… ② とする。

また，$2\sin(x+y)-2\cos(x+y) \geqq \sqrt{2}$ から　　$2\sqrt{2}\sin\left(x+y-\dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \sqrt{2}$

ゆえに　　$\sin\left(x+y-\dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \dfrac{1}{2}$　…… ③

①＋② から　　$0 \leqq x+y \leqq 2\pi$

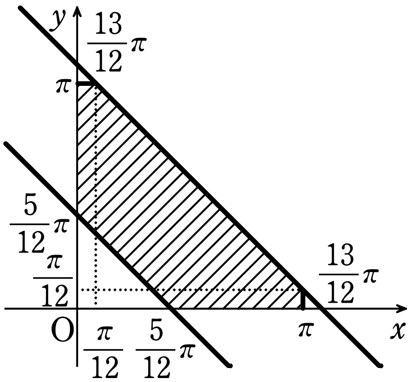
よって　　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x+y-\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{7}{4}\pi$

この範囲で ③ を解くと

$$\frac{\pi}{6} \leqq x+y-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{6}\pi$$

よって　　$\dfrac{5}{12}\pi \leqq x+y \leqq \dfrac{13}{12}\pi$　…… ④

①，②，④ をすべて満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合が D であるから，D は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



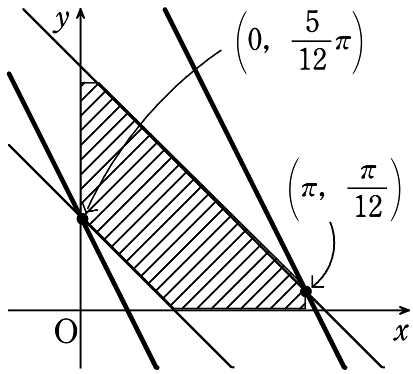
(2)　$2x+y=k$ …… ⑤ とおくと，これは傾き -2，y 切片 k の直線を表す。

この直線 ⑤ が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から，k の値は，直線 ⑤ が

点 $\left(\pi,\ \dfrac{\pi}{12}\right)$ を通るとき最大になり，

点 $\left(0,\ \dfrac{5}{12}\pi\right)$ を通るとき最小になる。



よって，$2x+y$ は

$x=\pi$，$y=\dfrac{\pi}{12}$ のとき　最大値 $2\cdot\pi+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{25}{12}\pi$，

$x=0$，$y=\dfrac{5}{12}\pi$ のとき　最小値 $2\cdot 0+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{5}{12}\pi$

をとる。

$\boxed{3}$

(解説)

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$1-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ より

$$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n}{4}\pi+i\sin\frac{n}{4}\pi\right),$$

$$(1-i)^n=(\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(-\frac{n}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{n}{4}\pi\right)\right\}=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n}{4}\pi-i\sin\frac{n}{4}\pi\right)$$

よって　$(1+i)^n+(1-i)^n=2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n}{4}\pi=(\sqrt{2})^{n+2}\cos\frac{n}{4}\pi$

したがって，$(\sqrt{2})^{n+2}\cos\frac{n}{4}\pi>10^{10}$ ……① を満たす最小の正の整数 n を求める。

$-1\leqq\cos\frac{n}{4}\pi\leqq1$ であるから，$(\sqrt{2})^{n+2}>10^{10}$ となることが必要である。

両辺の常用対数をとると　$\frac{1}{2}(n+2)\log_{10}2>10$

すなわち　$n>\frac{20}{\log_{10}2}-2$

ここで，常用対数表より　$0.3009<\log_{10}2<0.3011$

よって　$n>\frac{20}{0.3011}-2>64.4$

したがって，不等式 ① が成り立つためには，$n\geqq65$ となることが必要である。

[1]　$n=65$ のとき

$$\log_{10}\left\{(\sqrt{2})^{65+2}\cos\frac{65}{4}\pi\right\}=33\log_{10}2<33\times0.3011=9.9363<10$$

ゆえに，$n=65$ のとき不等式 ① は成り立たない。

[2]　$66\leqq n\leqq70$ のとき

$\cos\frac{n}{4}\pi\leqq0$ であるから　$(\sqrt{2})^{n+2}\cos\frac{n}{4}\pi\leqq0<10^{10}$

ゆえに，$66\leqq n\leqq70$ のとき不等式 ① は成り立たない。

[3]　$n=71$ のとき

$$\log_{10}\left\{(\sqrt{2})^{71+2}\cos\frac{71}{4}\pi\right\}=36\log_{10}2>36\times0.3009=10.8324>10$$

ゆえに，$n=71$ のとき不等式 ① は成り立つ。

[1]，[2]，[3] から，与えられた不等式を満たす最小の正の整数 n は　$n=71$